II-124 多次元核によって表わされる最適系

天　野　正　章

Optimum Systems Represented by Multi-dimensional Kernels

Masaaki AMANO

Abstract

By introducing the system represented by multi-dimensional kernels (or multi-dimensional filters), here is discussed the procedure of the synthesis of optimum system in the sense of the minimum power of the error signal which indicates the difference betweetn the system output and the desired output. While the system input is a member of the stationary stochastic process in a broad sense.

And the problem of optimum multi-dimensional filter is discussed as one of the applications.

1. まえがき

N. Wiener, Y· W· Lee 等により多次元核（多次元フィルター）を持つ系が導入された[1)2)3)]。

本報告は，このような系の最適問題を考える。さらに，その最適フィルター問題への応用をのべる。

本報告では，かんたんの為に，上述の系への入力信号は，すべて広義の定常確率過程に属するものとする。

2. 多次元核による系について

広義の定常確率過程に属する入力信号 $f(t)$ を，線形フィルター $h(\tau)$ を通過させた時の出力 $\zeta(t)$ は

$$\zeta(t)=\int_0^\infty h(\tau)f(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

と表わすことができる。この出力 $\zeta(t)$ を，たとえば二乗素子に通過させた場合の出力 $\xi(t)$ は

$$\begin{aligned}\xi(t)&=\zeta(t)^2\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)f(t-\tau_1)f(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2\end{aligned} \tag{2}$$

と表わすことができる。一般に n 乗素子を通過させた出力 $\xi(t)$ は

$$\begin{aligned}\xi(t)=\zeta(t)^n=&\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\cdots\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)\cdots\cdots\\&h(\tau_n)f(t-\tau_1)f(t-\tau_2)\cdots\cdots f(t-\tau_n)\cdot\\&d\tau_1d\tau_2\cdots\cdots,d\tau_n\end{aligned} \tag{3}$$

と表わすことができる。ただし $h(\tau)$ はインパルス応答関数であって，物理的実現可能条件

$$h(\tau)=\begin{cases}h(\tau) & :\tau\geqq0\\0 & :\tau<0\end{cases} \tag{4}$$

を満足しているものとする。(3)において $h(\tau_1)h(\tau_2)\cdots h(\tau_n)$ は(3)で表わされる系の n 次元核と呼ばれている。これはさらに一般的に $h(\tau_1,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_n)$ とかくことができるから以後あらためて，これを，多次元核（多次元フィルター）と呼ぶことにする。したがって(3)は

$$\begin{aligned}\xi(t)=&\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\cdots\\&\int_0^\infty h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_n)f(t-\tau_1)f(t-\tau_2)\cdots\cdots\\&f(t-\tau_n)d\tau_1d\tau_2\cdots\cdots d\tau_n\end{aligned} \tag{5}$$

とかかれる。

しかし乍ら，上のような単一のn乗素子のみならず，さらに一般的に次のような非線型オペレーターを用意することもできる。

$$\xi(t)=M(\zeta(t)) \tag{6}$$

(6)で表わされるオペレーターMを

$$\xi(t)=M\{\zeta(t)\}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}A_\alpha\zeta(t)^\alpha \tag{7}$$

なる $\zeta(t)=0$ の近傍におけるテーラー展開可能なオペレーターとして定義することにする。形式的に，(7)は収束することを仮定すれば，実際問題として有限和で取り扱われる。

(7)の具体的モデルとしてオペレーターMを $e^{-\xi}$ にえらべば係数 A_α は

$$A_\alpha = \frac{M^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} = \frac{1}{\alpha!} \tag{8}$$

となる。

さて，(1)を(7)に代入すれば次式をうる。

$$\xi(t) = A_0 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots\cdots$$
$$\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)\cdots\cdots h(\tau_\alpha)\cdot f(t-\tau_1)f(t-\tau_2)\cdots\cdots$$
$$f(t-\tau_\alpha)d\tau_1 d\tau_2\cdots\cdots d\tau_\alpha \tag{9}$$

上式において，$h(\tau_1)h(\tau_2)\cdots h(\tau_\alpha)$ をより一般に $h(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\alpha)$ でおきかえれば，(9)を一般化した非線型オペレーター

$$\xi(t) = A_0 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots\cdots$$
$$\int_0^\infty h(\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots, \tau_\alpha)\cdot f(t-\tau_1)f(t-\tau_2)\cdots\cdots$$
$$f(t-\tau_\alpha)d\tau_1 d\tau_2\cdots\cdots d\tau_\alpha \tag{10}$$

をうる。(4)の性質から，拡張された物理的実現可能条件

$$h(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\alpha) = \begin{cases} h(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\alpha) : \tau_i \geqq 0 (i=1, 2, \cdots, \alpha) \\ 0 \qquad\qquad\qquad : \tau_i < 0 (i=1, 2, \cdots, \alpha) \end{cases} \tag{11}$$

を仮定する。しかし乍ら(1)において，インパルス応答 $h(\tau)$ は $T \geqq \tau \geqq 0$ なる有限時間 T に対して値を持ち，$\tau > T$, $\tau < 0$, で零となるならば

$$\zeta(t) = \int_0^T h(\tau) f(t-\tau) d\tau \tag{12}$$

となる。これに対応して(10)は

$$\xi(t) = A_0 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha \int_0^T \int_0^T \cdots\cdots$$
$$\int_0^T h(\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots, \tau_\alpha) f(t-\tau_1) f(t-\tau_2)\cdots\cdots$$
$$f(t-\tau_\alpha)d\tau_1 d\tau_2\cdots\cdots d\tau_\alpha \tag{13}$$

とかくことができる。この系において $T\to\infty$ とおけば(10)をうるから，以後(13)の系で考えていくことにする。したおって多次元核 $h(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\alpha)$ の満足すべき実現可能条件は

$$h(\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots, \tau_\alpha) = \begin{cases} h(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\alpha) : T \geqq \tau_i \geqq 0 (i=1, 2, \cdots, \alpha) \\ 0 \qquad\qquad : \tau_i < 0 \text{ と } \tau_i > T (i=1, 2, \cdots, \alpha) \end{cases} \tag{14}$$

となる。

さて，このような多次核に対応する系の伝達関数と多次元核の関係は次のような拡張されたフーリエ変換対で定義することができる。すなわち，

$$\underset{\text{(伝達関数)}}{H(S_1, S_2, \cdots, S_\alpha)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, t_2, \cdots\cdots t_\alpha) e^{-s_1 t_1} \cdot e^{-s_2 t_2} \cdots\cdots$$
$$e^{-s_\alpha t_\alpha} dt_1 dt_2 \cdots\cdots dt_\alpha \tag{15}$$

$$h(t_1, t_2, \cdots\cdots, t_\alpha) = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^\alpha \int_{-j\infty}^{j\infty} \int_{-j\infty}^{j\infty} \cdots\cdots$$
$$\int_{-j\infty}^{j\infty} H(s_1, s_2, \cdots\cdots, s_\alpha) e^{s_1 t_1} e^{s_2 t_2} \cdots\cdots$$
$$e^{s_\alpha t_\alpha} ds_1 ds_2 \cdots\cdots ds_\alpha \tag{16}$$

ただし

$$s_i = \tau_i + j\omega_i \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, \alpha) \tag{17}$$

τ_i, ω_i は実数

3. 最適な系について

このようにしてえられた出力 $\xi(t)$ として，ある，あらかじめ設定された希望出力 $z(t)$ を要求したい。このような問題はとくに重要である。たとえばフィードバック系を等価的に表わせば(13)の形に属することは容易に示される。

しかし乍ら，一般に $z(t)$ と $\xi(t)$ とは一致しないから

$$e(t) = z(t) - \xi(t) \tag{18}$$

なる誤差に対するオペレーター R によって，$R\cdot e(t)$ を何らかの設定条件に持っていくように $\xi(t)$ を制御しなければならない。そこで，計算上，又，物理的な意味との関連において，オペレーター R を

$$R\cdot e(t) = E[e(t)^2] \tag{19}$$

とおくことにする。ここで E は期待値を示す。そうすれば(19)は誤差信号 $e(t)$ のパワーを示すことになる。よって(19)を最小にする各多次元核 $h(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\alpha)$ を最適多次元核，と名づけることにする。

(13)と共に(18)を適用すれば(19)は次式となる。

$$E[e(t)^2]$$
$$= A_0^2 - 2A_0 E[z(t)] + E[z(t)^2]$$
$$-2\sum_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha \int_0^T \int_0^T \cdots\cdots$$
$$\int_0^T h(\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots, \tau_\alpha) \phi_{1\alpha}^{\tau} d\tau_1 d\tau_2 \cdots\cdots d\tau_\alpha$$
$$+2A_0 \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha \int_0^T \int_0^T \cdots\cdots$$
$$\int_0^T h(\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots, \tau_\alpha) \phi_{2\alpha}^{\tau} d\tau_1 d\tau_2 \cdots\cdots d\tau_\alpha$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} A_\alpha A_\beta \int_0^T \cdots \int_0^T \int_0^T \cdots\cdots$$
$$\int_0^T h(\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots, \tau_\alpha) h(\tau_1', \tau_2', \cdots\cdots, \tau_\beta') \phi_{3\alpha\beta}^{\tau\tau'} \cdot$$
$$d\tau_1 \cdots\cdots d\tau_\alpha d\tau_1' \cdots\cdots d\tau_\beta' \tag{20}$$

ただし，

$$\phi_{1\alpha}{}^{\tau} = E[z(t) f(t-\tau_1) f(t-\tau_2) \cdots f(t-\tau_\alpha)] \tag{21}$$

$$\phi_{2\alpha}{}^{\tau} = E[f(t-\tau_1) f(t-\tau_2) \cdots f(t-\tau_\alpha)] \tag{22}$$

$$\phi_{3\alpha\beta}{}^{\tau\tau'} = E[f(t-\tau_1) f(t-\tau_2) \cdots\cdots$$
$$f(t-\tau_\alpha) f(t-\tau_1') f(t-\tau_2') \cdots\cdots$$

$f(t-\tau_\beta')]$ (23)

ここで(20)の多次元核 $h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)$ に対して変分 $\delta h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)=\eta g(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)$ をとることによって，$E[e(t)^2]$ を最小にする為の必要十分条件として次式の連立積分方程式をうる。ただし η は任意のスカラー，g は任意の多次元核である。

$$\phi_{1\beta}{}^{\tau\prime}-A_0\phi_{2\beta}{}^{\tau\prime}=\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha\int_0^T\int_0^T\cdots\cdots\int_0^T h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)\phi_{3\alpha\beta}{}^{\tau\tau\prime}\cdot d\tau_1\cdots\cdots d\tau_\alpha \tag{24}$$

ただし，$T\geqq\tau_i'\geqq0\ (i=1,2,\cdots\cdots\beta)$

$\beta=1,2,\cdots\cdots,\infty$

実際問題としては α はたとえば有限の正の数 a までで切れるから，したおって，β も a までである。よって(24)は未知数が a 個（各 $h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)$）の連立積分方程式となる。一般に(24)の解 $h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)(\alpha=1,2,\cdots\cdots)$ が求める最適多次元核であって，そのときの出力 $\xi(t)$ が $z(t)$ の最も良い近以となる。そのときの最小誤差のパワーは(24)を(20)の最後の項に代入することによって次式となる。

$$\begin{aligned}E[e(t)^2]_{\min}=&A_0{}^2-2A_0E[z(t)]+E[z(t)^2]\\&-\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha\int_0^T\int_0^T\cdots\cdots\int_0^T h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots\tau_\alpha)\phi_{1\alpha}{}^{\tau}d\tau_1d\tau_2\cdots\cdots d\tau_\alpha\\&+\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_0A_\alpha\int_0^T\int_0^T\cdots\cdots\int_0^T h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)\phi_{2\alpha}{}^{\tau}d\tau_1d\tau_2\cdots\cdots d\tau_\alpha\end{aligned} \tag{25}$$

あるいは，上式をまとめれば

$$E[e(t)^2]_{\min}=E[(z(t)-A_0)^2]-\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha\int_0^T\int_0^T\cdots\cdots\int_0^T h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)\{\phi_{1\alpha}{}^{\tau}-A_0\phi_{2\alpha}{}^{\tau}\}\cdot d\tau_1d\tau_2\cdots\cdots d\tau_\alpha \tag{26}$$

4. 最適フィルター問題

このようにして(24)でえられる解によって所望の出力 $z(t)$ にできるだけ相以な出力がえられるのだけれども，今入力 $f(t)$ が，たとえば信号 $x(t)$，雑音 $y(t)$ の和，

$$f(t)=x(t)+y(t) \tag{27}$$

で与えられている場合，希望出力 $z(t)$ を信号 $x(t)$ そのものと設定する。ここで $x(t)$，$y(t)$ は広義の定常過程とし，それらは互いに独立とする。さらに一般性を失わずに，それぞれの平均値を零と仮定する。そうすれば(21)，(22)，(23)から次式がえられる。

$$\phi_{1\alpha}{}^{\tau}=E[x\prod_{i=1}^{\alpha}(x_i+y_i)] \tag{28}$$

ただし $x=x(t)$，$x_i=x(t-\tau_i)$，$y_i=y(t-\tau_i)$ とおく。

$$\phi_{2\alpha}{}^{\tau}=E[\prod_{i=1}^{\alpha}(x_i+y_i)] \tag{29}$$

$$\phi_{3\alpha\beta}{}^{\tau\tau\prime}=E[\prod_{i=1}^{\alpha}(x_i+y_i)\prod_{i=1}^{\alpha}(x_i'+y_i')] \tag{30}$$

ただし $x_i'=x(t-\tau_i')$，$y_i'=y(t-\tau_i')$ とおく

そこでたとえば $\alpha=1,2$，すなわち高々2次元核まで考えるとすれば

$$\phi_{11}{}^{\tau}=E[x(x_1+y_1)]=E[xx_1]+E[xy_1]=E[xx_1] \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\phi_{12}{}^{\tau}&=E[x(x_1+y_1)(x_2+y_2)]\\&=E[x(x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2)]\\&=E[xx_1x_2]+E[xx_1y_2]+E[x_2y_1]+E[y_1y_2]\\&=E[xx_1x_2]\end{aligned} \tag{32}$$

$$\phi_{21}{}^{\tau}=E[x_1+y_1]=E[x_1]+E[y_1]=0 \tag{33}$$

$$\phi_{22}{}^{\tau}=E[(x_1+y_1)(x_2+y_2)]=E[x_1x_2]+E[x_1y_2]+E[y_1x_2]+E[y_1y_2]=E[x_1x_2]+E[y_1y_2] \tag{34}$$

同様に

$$\phi_{311}{}^{\tau\tau\prime}=E[(x_1+y_1)(x_1'+y_1)]=E[x_1x_1']+E[y_1y_1'] \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\phi_{312}{}^{\tau\tau\prime}&=E[(x_1+y_1)(x_1'+y_1')(x_2'+y_2')]\\&=E[(x_1+y_1)(x_1'x_2'+x_1'y_2'+y_1'x_2'+y_1'y_2')]\\&=E[x_1x_1'x_2']+E[y_1y_1'y_2']\end{aligned} \tag{36}$$

$$\phi_{321}{}^{\tau\tau}=E[(x_1+y_1)(x_2+\mathcal{K}_2)(x_1'+y_2')]=E[x_1x_2x_1']+E[y_1y_2y_2'] \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\phi_{322}{}^{\tau\tau\prime}&=E[(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_1'+y_1')(x_2'+y_2')]\\&=E[x_1x_2x_1'x_2']+E[x_1x_2]E[y_1'y_2']\\&+E[x_1x_1']E[y_2y_2']+E[x_1x_2']E[y_2y_1']\\&+E[x_2x_1']E[y_1y_2']+E[x_2x_2']E[y_1y_1']\\&+E[x_1'x_2']E[y_1y_2]+E[y_1y_2y_1'y_2']\\&=E[x_1x_2]E[x_1'x_2']+E[x_1x_1']E[x_2x_2']\\&+E[x_1x_2']E[x_2x_1']+E[x_1x_2]E[y_1'y_2']\\&+E[x_1x_1']E[y_2y_2']+E[x_1x_2']E[y_2y_1']\\&+E[x_2x_1']E[y_1y_2']+E[x_2x_2']E[y_1y_1']\\&+E[x_1'x_2']E[y_1y_2]+E[y_1y_2]E[y_1'y_2']\\&+E[y_1y_1']E[y_2y_2']+E[y_1y_2']E[y_2y_1']\end{aligned} \tag{38}$$

となる。したがって(24)は

$$\begin{cases}\phi_{11}{}^{\tau\prime}=A_1\displaystyle\int_0^T h(\tau_1)\phi_{311}{}^{\tau\tau\prime}d\tau_1+A_2\int_0^T\int_0^T h(\tau_1,\tau_2)\phi_{321}{}^{\tau\tau\prime}d\tau_1d\tau_2\\ \phi_{12}{}^{\tau\prime}-A_0\phi_{22}{}^{\tau\prime}=A_1\displaystyle\int_0^T h(\tau_1)\phi_{312}{}^{\tau\tau\prime}d\tau_1+A_2\int_0^T\int_0^T h(\tau_1,\tau_2)\phi_{322}{}^{\tau\tau\prime}d\tau_1d\tau_2\end{cases} \tag{39}$$

となる。

しかし，通常はとくに制御系等において信号 $x(t)$, 雑音 $y(t)$ は正規分布として近以的に置きかえられるからそのような意味で信号，雑音を正規過程と仮定すれば

$$\phi_{12}{}^{\tau}=0$$

$$\phi_{312}{}^{\tau\tau'}=0=\phi_{321}{}^{\tau\tau'}$$

となり，その他は零ならずであるから(39)は

$$\begin{cases}\phi_{11}{}^{\tau'}=A_1\int_0^T h(\tau_1)\phi_{311}{}^{\tau\tau'}d\tau_1 \\ -A_0\phi_{22}{}^{\tau'}=A_2\int_0^T\int_0^T h(\tau_1,\tau_2)\phi_{322}{}^{\tau\tau'}d\tau_1 d\tau_2\end{cases} \qquad (40)$$

となる。

ここで $E[x_1x_2]$, $E[y_1y_2]$ は信号，雑音の自己相関数である。したがってこの形を決めることによって他の２変数に関する共分数も同様にして決定される。

さて(40)の場合には誤差の最小パワーは(26)から

$$E[e(t)^2]_{\min}=E[(z(t)-A_0)^2]$$
$$-\Big[A_1\int_0^T h(\tau_1)\phi_{11}{}^{\tau}d\tau_1$$
$$-A_0A_2\int_0^T\int_0^T h(\tau_1,\tau_2)\phi_{22}{}^{\tau}d\tau_1 d\tau_2\Big] \qquad (41)$$

となる。

さて，(27)の入力をより一般化した入力について考えよう。もしも信号 $x(t)$ と雑音 $y(t)$ が $f[x,y]$ なる x, y に関して解析的な関数で結合するならば

$$f(t)=f[x(t),y(t)]$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}B_{lm}x(t)^l y(t)^m \qquad (42)$$

なる２変数のマクローリン展開形が仮定できる。よって(42)を(21), (22), (23)に代入することによって，それぞれ次式をうる。このとき $z(t)$ は前と同様に信号 $x(t)$ そのものとする。又 $x(t)$ と $y(t)$ は独立とする。

$$\phi_{1\alpha}{}^{\tau}=E\Big[x\prod_{i=1}^{\alpha}\Big(\sum_{l_i=0}^{\infty}\sum_{m_i=0}^{\infty}B_{l_i m_i}x_i{}^{l_i}y_i{}^{m_i}\Big)\Big]$$
$$=\sum_{l_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{l_\alpha=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_\alpha=0}^{\infty}\Big(\prod_{i=1}^{\alpha}B_{l_i m_i}\Big)E\Big[\prod_{i=1}^{\alpha}xx_i{}^{l_i}\Big]\cdot$$
$$E\Big[\prod_{i=1}^{\alpha}y_i{}^{m_i}\Big] \qquad (43)$$

同様に

$$\phi_{2\alpha}{}^{\tau}=\sum_{l_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{l_\alpha=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots$$
$$\sum_{m_\alpha=0}^{\infty}\Big(\prod_{i=1}^{\alpha}B_{l_i m_i}\Big)E\Big[\prod_{i=1}^{\alpha}x_i{}^{l_i}\Big]E\Big[\prod_{i=1}^{\alpha}y_i{}^{m_i}\Big] \qquad (44)$$

$$\phi_{3\alpha\beta}{}^{\tau\tau'}=\sum_{l_1,m_1=0}^{\infty}\cdots\cdots\sum_{l_\alpha,m_\alpha=0}^{\infty}\sum_{l_1',m_1'=0}^{\infty}\cdots\cdots$$
$$\sum_{l_\beta',m_\beta'=0}^{\infty}\Big(\prod_{i=1}^{\alpha}B_{l_i m_i}\prod_{i=1}^{\infty}B_{l_j' m_j'}\Big)$$
$$E\Big[\prod_{i=1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta}x_i{}^{l_i}x'_j{}^{l'_j}\Big]\cdot E\Big[\prod_{i=1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta}y_i{}^{m_i}y'_j{}^{m'_j}\Big] \qquad (45)$$

たとえば(27)は(42)で

$$B_{lm}=\begin{cases}1: l=1,\ m=0 \\ 1: l=0,\ m=1 \\ 0: \text{その他の } l,\ m \text{ に対して}\end{cases}$$

とおくことに相当する。したがって $\alpha=1$, 2 のみを考えれば

$$\phi_{1\tau}=\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}B_{l_1m_1}E\Big[xx_1{}^{l_1}\Big]E\Big[y_1{}^{m_1}\Big]=E[xx_1]$$

となって(31)と一致する。又

$$\phi_{12}{}^{\tau}=\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}B_{l_1m_1}B_{l_2m_2}E[xx_1{}^{l_1}x_2{}^{l_2}]\cdot$$
$$E[y_1{}^{m_1}y_2{}^{m_2}]$$
$$=\sum_{l_2=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\{B_{l_2m_2}E[xx_1x_2{}^{l_2}]\cdot E[y_2{}^{m_2}]$$
$$+B_{l_2m_2}E[xx_2{}^{l_2}]E[y_1y_2{}^{m_2}]\}$$
$$=E[xx_1x_2]E[1]+E[xx_2]E[y_1]$$
$$+E[xx_1]E[y_2]+E[x]E[y_1y_2]=E[xx_1x_2]$$

となって(32)と一致する。同様にして $\phi_{21}{}^{\tau}$, $\phi_{22}{}^{\tau}$ も容易に(33)(34)と一致することがわかる。さらに(45)から

$$\phi_{311}{}^{\tau\tau'}=\sum_{l_1,m_1=0}^{\infty}\sum_{l_1',m_1'=0}^{\infty}B_{l_1m_1}BB_{l_1'm_1}E[x_1{}^{l_1}x_1{}'^{l_1'}]\cdot$$
$$E[y_1{}^{m_1}y_1{}'^{m_1'}]$$
$$=\sum_{l_1',m_1'=0}^{\infty}B_{l_1'm_1'}\{E[x_1x_1{}'^{l_1'}]E[y_1{}'^{m_1'}]$$
$$+E[x_1{}'^{l_1'}]E[y_1y_1{}'^{m_1'}]\}$$
$$=E[x_1x_1']E[1]+E[x_1']E[y_1]$$
$$+E[x_1]E[y_1']+E[1]E[y_1y_1']$$
$$=E[x_1x_1']+E[y_1y_1']$$

となって (35) と一致する。$\phi_{312}{}^{\tau\tau'}$, $\phi_{321}{}^{\tau\tau'}$, $\phi_{322}{}^{\tau\tau'}$ についても同様である。

そして，これまでの議論が意味を持つ為には，一般に(13)の出力 $\xi(t)$ が安定な信号波でなければならない。したがって，明らかに

$$\int_0^T\int_0^T\cdots\cdots$$
$$\int_0^T|h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)|d\tau_1d\tau_2\cdots\cdots d\tau_\alpha<\infty$$

なる条件を満足することを仮定している。

5. あとがき

広義の定常過程に属する入力 $f(t)$ に対して(13)で示される非線型オペレーターの作用を受ける系を考えた場合，ある所望の出力 $z(t)$ を取り出す為の最適な系は結局誤差の最小パワーの意味で(24)の解で与えられる。そのときの誤差の最小パワーは(25)で与えられる。

又，信号と雑音が(42)の形で結合している場合，信号そのものをとりだす為の最適多次元フィルターは(21), (22), (23)がそれぞれ(43), (44), (45)となり，その条件下で(24)

の解を求めれば良いことになった。同様に誤差の最小パワーは(25)又は(26)で与えられる。但し信号，雑音は互いに独立とし，一般性を失わずに平均値零を仮定した。

個々の具体的なシンセシス例は別の機会に報告したい。

References

1) N· Wiener., "Nonlinear Problems in Random Theory" 1958 wiley & Sons.

2) Y. W. Lee., M. I. T press Lab. Elec. Quarterly progress report no 60. 1961

3) H. L. Van Trees., "Synthesis of Optimum Nonlinear Control Sytems" 1962. M. I. T pres.

付　録

変分 $\delta h=\eta g$ を(20)に与えたときの誤差信号のパワー $E[e(t)^2{}_\eta]$ は次式となる。

$$E[e(t)^2{}_\eta]=A_0{}^2-2A_0E[z(t)]+E[z(t)^2]$$
$$-2\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha\int_{v\alpha}(h_\alpha{}^\tau+\eta g_\alpha{}^\tau)(\phi_{1\alpha}{}^\tau-A_0\phi_{2\alpha}{}^\tau)dv_\alpha$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty}A_\alpha A_\beta\cdot$$
$$\int_{v\alpha}\int_{v\beta'}(h_\alpha{}^\tau+\eta g_\alpha{}^\tau)(h_\beta{}^{\tau'}$$
$$+\eta g_\beta{}^{\tau'})\phi_{3\alpha\beta}{}^{\tau\tau'}dv_\alpha dv_\beta'=E[e(t)^2]$$
$$-2\eta\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha\int_{v\alpha}g_\alpha{}^\tau(\phi_{1\alpha}{}^\tau-A_0\phi_{2\alpha}{}^\tau)dv_\alpha$$
$$+2\eta\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty}A_\alpha A_\beta\int_{v\alpha}\int_{v\beta'}h_\alpha{}^\tau g_\beta{}^{\tau'}\phi_{3\alpha\beta}{}^{\tau\tau'}dv_\alpha dv_\beta'$$
$$+\eta^2\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty}A_\alpha A_\beta\int_{v\alpha}\int_{v\beta'}g_\alpha{}^\tau g_\beta{}^{\tau'}\phi_{3\alpha\beta}{}^{\tau\tau'}dv_\alpha dv_\beta'$$
$$=E[e(t)^2]-2M\eta+L \qquad (A-1)$$

ただし，$h(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)=h_\alpha{}^\tau$

$g(\tau_1,\tau_2,\cdots\cdots,\tau_\alpha)=g_\alpha{}^\tau$

$$\int_0^T\int_0^T\cdots\cdots\int_0^T\cdot d\tau_1d\tau_2\cdots\cdots d\tau_\alpha=\int_{v\alpha}\cdot dv_\alpha$$
$$\int_0^T\int_0^T\cdots\cdots\int_0^T\cdot d\tau_1'd\tau_2'\cdots\cdots d\tau_\beta'=\int_{v\beta'}\cdot dv_\beta'$$

とおいた。

ここに

$$L=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty}A_\alpha A_\beta\int_{v\beta}\int_{v\beta'}g_\alpha{}^\tau g_\beta{}^{\tau'}\phi_{3\alpha\beta}{}^{\tau\tau'}dv_\alpha dv_\beta'$$
$$=\left\{\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha\int_{v\alpha}g_\alpha{}^\tau E[\prod_{\alpha=1}^{\infty}f(t-\tau_i)]dv_\alpha\right\}^2>0 \qquad (A-2)$$

$$M=\sum_{\beta=1}^{\infty}A_\beta\int_{v\beta'}g_\beta{}^{\tau'}\{(\phi_{1\beta}{}^{\tau'}-A_0\phi_{2\beta}{}^{\tau'})$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha\int_{v\alpha}h_\alpha{}^\tau\phi_{3\alpha\beta}{}^{\tau\tau'}dv_\alpha\}\cdot dv_\beta' \qquad (A-3)$$

ただし　$T\geqq\tau_1',\tau_2',\cdots\cdots,\tau_\beta'\geqq0$

したがって $E[e(t)^2]$ がいま最小である為には (A—1) から

$$\left.\frac{d(E[e(t)^2{}_\eta])}{d\eta}\right]_{\eta=0}=0 \qquad (A-4)$$

なることが必要十分条件である。

よって (A—4) から

$$M=0 \qquad (A-5)$$

がなりたつ。(A—3) から $g_\beta{}^{\tau'}$ は任意の多次元核であるから (A—5) がなりたつ為には

$$\phi_{1\beta}{}^{\tau'}-A_0\phi_{2\beta}{}^{\tau'}=\sum_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha\int_{v\alpha}h_\alpha{}^\tau\phi_{3\alpha\beta}{}^{\tau\tau'}dv_\alpha$$
$$(\beta=1,2,\cdots\cdots),\ T\geqq\tau_1',\tau_2',\cdots\cdots,\tau_\beta'\geqq0 \qquad (A-6)$$

でなければならない。よって(24)がえられた。