(1974. 10. 15 受理)

擬線形状態推定についての一考察

天　野　正　章

A Consideration on the Quasi-Linear State Estimates

Masaaki AMANO

Synopsis

The optimum estimate of a signal (state vector) is conventionally defined by the conditional expectation concerned with the observed signals (received signals). It is assumed that the observed signals are the nonlinear vector function of two signals (state vectors) and observed noises, and that each of two signals is taken for the solution of the stochastic nonlinear differential equations with gaussian white noise inputs. In the nonlinear systems, the optimum estimate is physically unrealizable because it requires the information about the infinite dimensional statistical moments.

Therefore, quasi-linearization methods are applied to the above nonlinear systems. As the optimum estimate for one of two signals is obtained, it is demonstrated that such an optimum estimate is the solution of the simultaneous differential equations.

1. まえがき

状態推定問題は周知のように N. Wiener の予測フィルタ問題[1] から発展したといっても過言ではない。従来は雑音にうずもれた信号に対してその信号に関連したある所望の出力を取りだす為のフィルタを設計するのに，所望の出力と求めようとするフィルタの実際の出力との誤差信号の自乗平均を最小にするフィルタのインパルス応答，あるいは伝達関数を計算することに努力を集中してきた。このアプローチはいづれもウィーナー・ホッフ型積分方程式の解を直接解くということであって，たとえ線形系であっても，入力信号，雑音が非定常確率過程に属することを仮定した場合にはかなり困難な問題となる。まして，非線形系に対しては形式的な一般論はともかく，具体的な解を求めることはほとんど不可能といっても過言ではないと思われる。入力信号，雑音が非定常性を持つ場合，すなわち求めようとするフィルタがダイナミック系で表わされる場合，状態推定理論の立場で線形系に対しての解を積分方程式を直接解かずに微分方程式に変換した上で求める方法が Kalman と Bucy[2] によって明らかにされた。その後非線形系に対する問題が多数取り扱われてきた[3]。しかし，非線形系に対する状態推定理論においては求めようとするフィルタ系には無限次元のモーメントに関する情報を含むので物

理的に実限不可能であるから，いかに有限次元モーメントの範囲で近似を行なうかが重要な問題となる。

本論文では2入力信号（状態ベクトルで表わされる）と雑音（正規白色雑音ベクトル）とが互いに非線形結合を生じて観測信号を生じている場合に対する推定問題を論じたい。この場合，2個の入力信号はそれぞれ互いに独立な正規白色雑音を入力にもつ非線形力学系によって発生されることを仮定する。また，物理的実限可能性を保持するために，非線形力学系，および観測系に対して，いわゆる確率的線形化近似[4]の立場をとることにする。このような状態推定を擬線形状態推定とよぶことにする。

2.　問題の提起

さて，2個の入力信号（状態ベクトル）は次の確率微分方程式によって表わされる非線形力学系によって発生されるものとする。

$$d\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{F}_1[t,\ \boldsymbol{x}(t)]dt+\boldsymbol{G}_1(t)d\boldsymbol{w}_1(t) \tag{1}$$

$$d\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{F}_2[t,\ \boldsymbol{y}(t)]dt+\boldsymbol{G}_2(t)d\boldsymbol{w}_2(t) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0 \tag{4}$$

ここで各記号は次のことを意味する。

$\boldsymbol{x}(t)$: $n_1\times 1$　状態ベクトル

$\boldsymbol{y}(t)$: $n_2\times 1$　状態ベクトル

$\boldsymbol{F}_1[\quad]$: $n_1\times 1$　ベクトル値関数

$\boldsymbol{F}_2[\quad]$: $n_2\times 1$　ベクトル値関数

$\boldsymbol{w}_1(t)$: $m_1\times 1$　ベクトルブラウン運動過程

$\boldsymbol{w}_2(t)$: $m_2\times 1$　ベクトルブラウン運動過程

$\boldsymbol{G}_1(t)$; $n_1\times m_1$　行列で t について連続

$\boldsymbol{G}_2(t)$; $n_2\times m_2$　行列で t について連続

ただし時間を表わすパラメータ t は現在時刻を表わし，t_0 は系の解発生開始時刻を表わすものとする。さらに (1) (2) の解の存在とその一意性は保証されるものとする。ここでは以下の理論展開の便宜上 (1) (2) の代りに，形式的にではあるが

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{F}_1[t,\ \boldsymbol{x}(t)]+\boldsymbol{G}_1(t)\boldsymbol{W}_1(t) \tag{1$'$}$$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\boldsymbol{F}_2[t,\ \boldsymbol{y}(t)]+\boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{W}_2(t) \tag{2$'$}$$

を用いることにする。ただし

$$\boldsymbol{W}_1(t)=\frac{d\boldsymbol{w}_1(t)}{dt},\quad \boldsymbol{W}_2(t)=\frac{d\boldsymbol{w}_2(t)}{dt}$$

であって，$\boldsymbol{W}_1(t)$，$\boldsymbol{W}_2(t)$ はそれぞれ，正規白色雑音となり，それぞれ $m_1\times 1$，$m_2\times 1$ ベクトルである。また共分散行列を期待値演算 E によって

$$cov[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(\tau)]=E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{y}'(\tau)]-E[\boldsymbol{x}(t)]E[\boldsymbol{y}'(\tau)]$$

で定めることにすれば雑音の性質から，その自己共分散，共分散行列は

$$cov[\boldsymbol{W}_1(t),\ \boldsymbol{W}_1(\tau)]=\boldsymbol{Q}(t)\delta(t-\tau) \tag{5}$$

$$cov[\boldsymbol{W}_2(t),\ \boldsymbol{W}_2(\tau)]=\boldsymbol{R}(t)\delta(t-\tau) \tag{6}$$

$$cov[\boldsymbol{W}_1(t),\ \boldsymbol{W}_2(\tau)]=0 \tag{7}$$

と仮定することを許すものとする。ここで $'$ は転置を示す。

さて，観測信号 $\boldsymbol{z}(t)$ は

$$\frac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt}=\boldsymbol{H}[t,\ \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{V}(t)] \tag{8}$$

で表わされるものとする。さらに，形式的にではあるが，

$$\boldsymbol{Z}(t)=\frac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{V}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} \tag{10}$$

とする。$\boldsymbol{v}(t)$ はブラウン運動過程を示し，したがって $\boldsymbol{V}(t)$ は正規白色雑音となる。 ここに $\boldsymbol{Z}(t_0)=0$ であって，

$\boldsymbol{Z}(t)$，$\boldsymbol{z}(t)$; $n_3\times1$ ベクトル

$\boldsymbol{H}[\ \ ]$; $n_3\times1$ ベクトル値関数

$n_1\geqq n_3$，$n_2\geqq n_3$

$\boldsymbol{V}(t)$; $d\times1$ ベクトル

$$cov[\boldsymbol{V}(t),\ \boldsymbol{V}(\tau)]=\boldsymbol{S}(t)\delta(t-\tau) \tag{11}$$

$$cov[\boldsymbol{W}_1(t),\ \boldsymbol{V}(\tau)]=cov[\boldsymbol{W}_2(t),\ \boldsymbol{V}(\tau)]=0 \tag{12}$$

とする。$\boldsymbol{Q}(t)$，$\boldsymbol{R}(t)$，$\boldsymbol{S}(t)$ はそれぞれ $m_1\times m_1$，$m_2\times m_2$，$d\times d$ 行列であって，すべて正定置形式である。$\delta(t-\tau)$ はディラックのデルタ関数を表わしている。 また $\boldsymbol{Q}(t)$，$\boldsymbol{R}(t)$，$\boldsymbol{S}(t)$ はパラメーター t について連続微分可能とする。

いまベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ の双対ベクトル空間の要素，すなわち共状態ベクトルを $\boldsymbol{x}^*$ とし，その成分を $x_i^*(i=1,\ 2\cdots\cdots n)$ とする。$1\times n$ ベクトル $\boldsymbol{x}^*$ の $\boldsymbol{x}(t)$ における値を

$$[\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{x}(t)]=\sum_{i=1}^{n}x_i^*x_i(t) \tag{13}$$

で定義する。 $x_i(t)$ は状態ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ の成分を示す。(13) はまた内積 $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}(t)$ で書くこともできるから

$$[\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{x}(t)]^2=(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}(t))^2=\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}'(t)\boldsymbol{x}^{*\prime}$$

等と演算することができる。以上の準備のもとで問題はつぎのように整理される。

問　題

時間区間　$t_0\leqq\tau\leqq t$　における観測信号　$\boldsymbol{Z}(\tau)$　が値が与えられているとき $E[\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]^2$ をすべての $\boldsymbol{x}^*$ に対して最小にするような推定

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)=E\{\boldsymbol{x}(t)|Zt\}=\int_{E^{(n)}}\boldsymbol{x}(t)P\{\boldsymbol{x}(t)|Z_t\}d\boldsymbol{x}(t) \tag{14}$$

を求めよ。ただし $E^{(n)}$ は n 次元ユークリッド空間を示し，Z_t は $t_0 \leqq \tau < t$ における観測信号 $\boldsymbol{Z}(\tau)$ の集合 $Z_t = \{\boldsymbol{Z}(\tau) : t_0 \leqq \tau < t\}$ を表わしている。また $P\{\ |Z_t\}$ は条件つき確率密度関数である。

周知のごとく，上述の制御基準は，その特別な場合として以下のようにいいかえることができる。すなわち

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t|t) \tag{15}$$

で定めた誤差ベクトル $\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t)$ のノルムを

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t)\| = (\tilde{\boldsymbol{x}}'(t|t)\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t))^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

で定義したとき，$E\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t)\|^2$ を最小にするような $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$ を求めよ。

さて上述の制御基準にそって最小化を行うのであるが，まず力学系，観測系に確率的線形化近似を行なうことにする。このようなアプローチによってえられる推定過程を擬線形推定過程とよぶことにする。

3.　力学系，観測系の線形化

さて (1)′ (2)′ (8) において

$$\boldsymbol{F}_1[t,\ \boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{\theta}_1(t) + \boldsymbol{\Theta}_1(t)[\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t|t)] + \boldsymbol{e}_x(t) \tag{17}$$

$$\boldsymbol{F}_2[t,\ \boldsymbol{y}(t)] = \boldsymbol{\theta}_2(t) + \boldsymbol{\Theta}_2[\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t|t)] + \boldsymbol{e}_y(t) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}[t,\ \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{V}(t)] &= \boldsymbol{\theta}_3(t) + \boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)[\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t|t)] \\ &+ \boldsymbol{\Theta}_{3y}[\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t|t)] + \boldsymbol{\Theta}_{3v}\boldsymbol{V}(t) + \boldsymbol{e}_H(t)\end{aligned} \tag{19}$$

とそれぞれ変関数の推定値のまわりで展開する。 $\boldsymbol{e}_x(t)$，$\boldsymbol{e}_y(t)$，$\boldsymbol{e}_H(t)$ は高次項をすべて集めたものである。

ここで

$\boldsymbol{\theta}_1(t) : n_1 \times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{\theta}_2(t) : n_2 \times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{\theta}_3(t) : n_3 \times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{\Theta}_1(t) : n_1 \times n_1$ 行列

$\boldsymbol{\Theta}_2(t) : n_2 \times n_2$ 行列

$\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t) : n_3 \times n_1$ 行列

$\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t) : n_3 \times n_2$ 行列

$\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t) : n_3 \times d$ 行列

$\boldsymbol{e}_x(t) : n_1 \times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{e}_y(t) : n_2 \times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{e}_H(t) : n_3 \times 1$ ベクトル

このとき $\boldsymbol{e}_x(t)$，$\boldsymbol{e}_y(t)$，$\boldsymbol{e}_H(t)$ の各成分を $e_{xi}(t)$，$e_{yj}(t)$，$e_{Hk}(t)$ で表わし，それぞれのノルムの自乗の期待値（条件つき）を最小にするような各展開係数を求めよう。(17)から

$$e_x(t)=F_1[t,\ x(t)]-\theta_1(t)-\Theta_1(t)[x(t)-\hat{x}(t/t)] \tag{20}$$

をうるから

$$E\{\|e_x(t)\|^2|Z_t\}=\sum_{i=1}^{n_1}E\{e^2{}_{xi}(t)|Z_t\}$$

$$=E\{\|F_1[t,\ x(t)]-\theta_1(t)-\Theta_1(t)[x(t)-\hat{x}(t/t)]\|^2|Z_t\}$$

右辺を各成分について示せば

$$\sum_{i=1}^{n_1}E\{[F_{1i}[t,\ x(t)]-\theta_{1i}(t)-\sum_{j=1}^{n_1}\Theta_{1ij}(t)[x_j(t)-\hat{x}_j(t/t)]^2|Z_t\}$$

よって

$$\frac{\partial E\{e^2{}_{xi}|Z_t\}}{\partial\theta_{1i}(t)}=0 \qquad (i=1,\ 2\cdots\cdots n_1)$$

より

$$\theta_{1i}(t)=E\{F_{1i}[t,\ x(t)]|Z_t\}=\hat{F}_{1i}[t,\ x(t)] \qquad (i=1,\ 2\cdots\cdots n_1)$$

をうる。よって

$$\theta_1(t)=E\{F_1[t,\ x(t)]|Z_t\}=\hat{F}[t,\ x(t)] \tag{21}$$

以下同様にして

$$\Theta_1(t)=E\{F_1[t,\ x(t)]-\hat{F}_1[t,\ x(t)]][x(t)-\hat{x}(t/t)]'|Z_t\}P_x(t|t)^{-1} \tag{22}$$

ここで $P_x(t|t)$ は $x(t)$ の条件つき誤差自己共分散行列で，次式で定義される。

$$P_x(t|t)=cov[x(t)|Z_t]=E[x(t)x'(t)|Z_t]-E[x(t)|Z_t]E[x'(t)|Z_t] \tag{23}$$

また (18) (19) より

$$e_y(t)=F_2[t,\ y(t)]-\theta_2(t)-\Theta_2(t)[y(t)-\hat{y}(t|t)] \tag{24}$$

$$e_H(t)=H[t,\ x(t),\ y(t),\ V(t)]-\theta_3(t)-\Theta_{3x}(t)[x(t)-\hat{x}(t|t)]$$
$$-\Theta_{3y}(t)[y(t)-\hat{y}(t/t)]-\Theta_{3v}(t)V(t) \tag{25}$$

がえられるから，

$$E\{\|e_y\|^2|Z_t\}=\sum_{j=1}^{n_2}E\{e^2{}_{yj}|Z_t\}$$

$$E\{\|e_H(t)\|^2|Z_t\}=\sum_{k=1}^{n_3}E\{e^2{}_{Hk}|Z_t\}$$

をそれぞれ各展開係数 $\theta_2(t)$，$\Theta_2(t)$，$\theta_3(t)$，$\Theta_{3x}(t)$，$\Theta_{3y}(t)$，$\Theta_{3v}(t)$ について同様に最小化をすれば若干の演算によって次の結果をうる。

$$\theta_2(t)=E\{F_2[t,\ y(t)]|Z_t\}=\hat{F}_2[t,\ y(t)] \tag{26}$$

$$\Theta_2(t)=E\{[F_2[t,\ y(t)]-\hat{F}_2[t,\ y(t)]][y(t)-\hat{y}(t|t)]'|Z_t\}P_y(t|t)^{-1} \tag{27}$$

$$P_y(t|t)=cov[y(t)|Z_t] \tag{28}$$

$$\theta_3(t)=E\{H[t,\ x(t),\ y(t),\ V(t)]|Z_t\}=\hat{H}[t,\ x(t),\ y(t),\ V(t)] \tag{29}$$

$$\Theta_{3x}(t)=\xi_1(t|t)\alpha(t|t)+\xi_2(t|t)\gamma(t|t) \tag{30}$$

$$\Theta_{3y}(t)=\xi_1(t|t)\beta(t|t)+\xi_2(t|t)\delta(t|t) \tag{31}$$

ただし $\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{y}(t)$ との条件つき誤差共分散行列を

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_{xy}(t|t)=cov[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t)|Z_t]=E\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{y}'(t)|Z_t\}-E\{\boldsymbol{x}(t)|Z_t\}E\{\boldsymbol{y}'(t)|Z_t\} & (32) \\ \boldsymbol{P}_{yx}(t|t)=cov[\boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{x}(t)|Z_t]=E\{\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{x}'(t)|Z_t\}-E\{\boldsymbol{y}(t)|Z_t\}E\{\boldsymbol{x}'(t)|Z_t\} & (33) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}^{x}(t|t), & \boldsymbol{p}^{xy}(t|t) \\ \boldsymbol{p}^{yx}(t|t), & \boldsymbol{p}^{y}(t|t) \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(t|t), & \beta(t|t) \\ \boldsymbol{\gamma}(t|t), & \delta(t|t) \end{bmatrix}$$

と定義される。また

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1(t|t)=E\{[&\boldsymbol{H}[t,\ \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{V}(t)]-\hat{\boldsymbol{H}}[t,\ \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{V}(t)] \\ &[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]'|Z_t\} \end{aligned} \qquad (34)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_2(t|t)=E\{[&\boldsymbol{H}[t,\ \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{V}(t)]-\hat{\boldsymbol{H}}[t,\ \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{V}(t)]] \\ &[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]'|Z_t\} \end{aligned} \qquad (35)$$

さらに，$\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)$ は次式より求められる。

$$E\{\boldsymbol{H}[t,\ \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{V}(t)]\boldsymbol{V}'(t)|Z_t\}=\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{S}(t)\delta(t-\tau) \qquad (36)$$

ただし

$\boldsymbol{\xi}_1(t|t):n_3\times n_1$ 行列　　$\boldsymbol{\xi}_2(t|t):n_3\times n_2$ 行列　　$\boldsymbol{\alpha}(t|t):n_1\times n_1$ 行列

$\boldsymbol{\beta}(t|t):n_1\times n_2$ 行列　　$\boldsymbol{\gamma}(t,t):n_2\times n_1$ 行列　　$\boldsymbol{\delta}(t|t):n_2\times n_2$ 行列

したがって，これら展開係数を用いて (1) (2) の代りに確率的線形化を行って次の確率微分方程式がえられることになる。

$$d\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Theta}_1(t)\boldsymbol{x}(t)dt+\{\boldsymbol{\theta}_1(t)-\boldsymbol{\Theta}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)\}dt+\boldsymbol{G}_1(t)d\boldsymbol{w}_1(t) \qquad (37)$$

$$d\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{\Theta}_2(t)\boldsymbol{y}(t)dt+\{\boldsymbol{\theta}_2(t)-\boldsymbol{\Theta}_2(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)\}dt+\boldsymbol{G}_2(t)d\boldsymbol{w}_2(t) \qquad (38)$$

また観測系に対しては

$$\begin{aligned} dz(t)=&\{\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{y}(t)\}dt \\ &+\{\boldsymbol{\theta}_3(t)-\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)-\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)\}dt+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)d\boldsymbol{v}(t) \end{aligned} \qquad (39)$$

をうる。

いま (37) の推移行列を $\boldsymbol{\phi}^x(t,\ \tau)$ とすれば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t)=&\boldsymbol{\phi}^x(t,\ t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}^x(t,\ s)[\boldsymbol{\theta}_1(s)-\boldsymbol{\Theta}_1(s)\hat{\boldsymbol{x}}(s/s)]ds \\ &+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}^x(t,\ s)\boldsymbol{G}_1(s)d\boldsymbol{w}_1(s) \end{aligned} \qquad (40)$$

であるから，

$$\boldsymbol{\xi}^x(t)=\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\rho}^x(t) \qquad (41)$$

$$\boldsymbol{\xi}^x(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0)$$

なる新しい確率過程を導入すると

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\xi}^x(t)}{dt}&=\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}+\frac{d\boldsymbol{\rho}^x(t)}{dt} \\ &=\frac{d\boldsymbol{\phi}^x(t,\ t_0)}{dt}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{d\boldsymbol{\phi}^x(t,\ s)}{dt}\boldsymbol{G}_1(s)d\boldsymbol{w}_1(s)+\boldsymbol{G}_1(t)d\boldsymbol{w}_1(t) \\ &=\boldsymbol{\Theta}_1(t)\boldsymbol{\xi}^x(t)+\boldsymbol{G}_1(t)\boldsymbol{W}_1(t) \end{aligned} \qquad (42)$$

をうる。ただし

$$\boldsymbol{\rho}^x(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}^x(t,\ \ s)\{\boldsymbol{\Theta}_1(s)\hat{\boldsymbol{x}}(s|s)-\boldsymbol{\theta}_1(s)\}ds \tag{43}$$

(38) についても同様に

$$\boldsymbol{\xi}^y(t)=\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{\rho}^y(t) \tag{44}$$

$$\boldsymbol{\xi}^y(t_0)=\boldsymbol{y}(t_0)$$

ただし

$$\boldsymbol{\rho}^y(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}^x(t,\ \ s)\{\boldsymbol{\Theta}_2(s)\hat{\boldsymbol{y}}(s|s)-\boldsymbol{\theta}_2(s)\}ds \tag{45}$$

なる新しい確率過程を導入すると

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}^y(t)}{dt}=\boldsymbol{\Theta}_2(t)\boldsymbol{\xi}^y(t)+\boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{W}_2(t) \tag{46}$$

をうる。ただし $\boldsymbol{\phi}^y(t,\ s)$ は (38) の推移行列である。また観測信号については (39) より

$$z(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Theta}_{3x}(s)\boldsymbol{x}(s)ds+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Theta}_{3y}(s)\boldsymbol{y}(s)ds+\boldsymbol{\rho}^{xy}(t)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Theta}_{3v}(s)\boldsymbol{V}(s)ds \tag{47}$$

ただし

$$\boldsymbol{\rho}^{xy}(t)=\int_{t_0}^{t}\{\boldsymbol{\theta}_3(t)-\boldsymbol{\Theta}_{3x}(s)\hat{\boldsymbol{x}}(s|s)\}ds-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Theta}_{3y}(s)\hat{\boldsymbol{y}}(s|s)ds \tag{48}$$

ここで

$$\boldsymbol{\eta}^z(t)=\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{\rho}^{xy}(t) \tag{49}$$

$$\boldsymbol{\eta}^z(t_0)=0$$

なる新しい確率過程を導入すると

$$d\boldsymbol{\eta}^z(t)=\{\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{y}(t)\}dt+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)d\boldsymbol{v}(t) \tag{50}$$

またさらに次の新しい確率過程

$$d\boldsymbol{\eta}(t)=d\boldsymbol{\eta}^z(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{\rho}^x(t)dt+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{\rho}^y(t)dt \tag{51}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_0)=0$$

を導入すると

$$d\boldsymbol{\eta}(t)=\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{\xi}^x(t)dt+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{\xi}^y(t)dt+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)d\boldsymbol{v}(t) \tag{52}$$

をうる。ここで (41) (44) から

$$E\{\boldsymbol{\xi}^x(t)|Z_t\}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^x(t|t)=\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)+\boldsymbol{\rho}^x(t) \tag{53}$$

$$E\{\boldsymbol{\xi}^y(t)|Z_t\}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^y(t|t)=\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)+\boldsymbol{\rho}^y(t) \tag{54}$$

である。しかるに $\eta(\tau)$ $(t_0\leqq\tau<t)$ のすべての値の集合を $\boldsymbol{\eta}^*=\{\boldsymbol{\eta}(\tau):t_0\leqq\tau<t\}$ とおけば条件つき期待値に関して

$$E\{\boldsymbol{\xi}^x(t)|\eta^*\}=E\{\boldsymbol{\xi}^x(t)|Z_t\}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^x(t|t)$$

$$E\{\boldsymbol{\xi}^y(t)|\boldsymbol{\eta}^*\}=E\{\boldsymbol{\xi}^y(t)|Z_t\}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^y(t|t)$$

なることがいえる。よって (1) (2) の非線形力学系に対する擬線形力学形はそれぞれ (42)

(46) で与えられ，(8) の非線形観測系に対する擬線形観測系は (52) で与えられる。以下の議論の便宜上 (52) の代りに次式を用いることにする。

$$\bar{\eta}(t)=\frac{d\eta(t)}{dt}=\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\xi^{x}(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\xi^{y}(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{V}(t) \tag{55}$$

4. 擬線形状態推定過程

このようにして，観測信号 $z(t)$ があたえられていて $\hat{x}(t|t)$ をあたえられた制御基準にしたがって求めるという問題は結局，観測信号 $\bar{\eta}(t)$ があたえられていて $\hat{\xi}^{x}(t|t)$ を求めようという問題に変換されたことになる。しかしながら，1種類の信号（状態ベクトル）のみをもつ場合の線形推定問題はすでに，Kalman と Bucy によってあたえられてはいるもののわれわれの問題の中には2種類の信号が存在するから，ただちに従来の線形推定の結果をそのまま適用することはできない。そこで，最近著者によってえられた結果[5]を一応補助定理の形で整理をしておくことにする。

補助定理

いま，力学系および観測系がそれぞれ

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{F}_1(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{G}_1(t)\boldsymbol{W}_1(t) \tag{56}$$

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt}=\boldsymbol{F}_2(t)\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{W}_2(t) \tag{57}$$

$$\boldsymbol{Z}(t)=\boldsymbol{H}_1(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{H}_2(t)\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{V}(t) \tag{58}$$

であたえられているとする。このとき観測信号 $z(t)$ があたえられているとき，$\boldsymbol{x}(t)$ の共状態ベクトル $\boldsymbol{x}^*$ に対して

$$E[\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]^2$$

を最少にする線形推定

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)=E\{\boldsymbol{x}(t)|Z_t\}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(t,\ \tau)\boldsymbol{Z}(\tau)d\tau \tag{59}$$

は，$\boldsymbol{y}(t)$ の共状態ベクトル $\boldsymbol{y}^*$ について

$$E[\boldsymbol{y}^*,\ \boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]^2$$

を最少にする推定を

$$\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)=E\{\boldsymbol{y}(t)|Z_t\}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{B}(t,\ \tau)\boldsymbol{Z}(\tau)d\tau \tag{60}$$

としたとき次の連立微分方程式で与えられる。

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)}{dt}=\boldsymbol{F}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)+\boldsymbol{K}_1(t)[\boldsymbol{Z}(t)-\boldsymbol{H}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_2(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t) \tag{61}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)}{dt}=\boldsymbol{F}_2(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)+\boldsymbol{K}_2(t)[\boldsymbol{Z}(t)-\boldsymbol{H}_2(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t) \tag{62}$$

ここで

$$\boldsymbol{K}_1(t)=\boldsymbol{P}_1(t|t)\boldsymbol{H}_1'(t)[\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)]^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}^1{}_t\boldsymbol{H}_2(t)'[\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)]^{-1} \tag{63}$$

$$\boldsymbol{K}_2(t)=\boldsymbol{P}_2(t|t)\boldsymbol{H}_2'(t)[\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)]^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}^2{}_t\boldsymbol{H}_1'(t)[\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)]^{-1} \tag{64}$$

$$\boldsymbol{P}_1(t|t)=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t),\ \boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)] \tag{65}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^1{}_t=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t),\ \boldsymbol{y}(t)] \tag{66}$$

$$\boldsymbol{P}_2(t|t)=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t),\ \boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)] \tag{67}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^2{}_t=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t),\ \boldsymbol{x}(t)] \tag{68}$$

$\boldsymbol{P}_1(t|t)$，$\boldsymbol{P}_2(t|t)$ はそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t)$，$\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t)$ の誤差自己共分散行列である。ただし $\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t)=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$，$\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t)=\boldsymbol{y}(t)-\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t)$ である。さらにこれら自己共分散行列は次の共分散行列

$$\boldsymbol{\Sigma}^3{}_t=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t),\ \boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)] \tag{69}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^4{}_t=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t),\ \boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)] \tag{70}$$

と共に次の連立微分方程式の解としてあたえられる。

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{P}_1(t|t)}{dt}=&[\boldsymbol{F}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_1(t)]\boldsymbol{P}_1(t|t)+\boldsymbol{P}_1(t|t)[\boldsymbol{F}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_1(t)]'\\&+\boldsymbol{G}_1(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{G}_1'(t)+\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)\\&-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_2(t)\boldsymbol{\Sigma}^4{}_t-\boldsymbol{\Sigma}^3{}_t\boldsymbol{H}_2'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{P}_2(t|t)}{dt}=&[\boldsymbol{F}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_2(t)]\boldsymbol{P}_2(t|t)+\boldsymbol{P}_2(t|t)[\boldsymbol{F}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_2(t)]'\\&+\boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{G}_2'(t)+\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)\boldsymbol{K}_2'(t)\\&-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_1(t)\boldsymbol{\Sigma}^3{}_t-\boldsymbol{\Sigma}^4{}_t\boldsymbol{H}'_1(t)\boldsymbol{K}_2'(t)\end{aligned} \tag{72}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Sigma}^1{}_t}{dt}=[\boldsymbol{F}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_1(t)]\boldsymbol{\Sigma}^1{}_t+\boldsymbol{\Sigma}^1{}_t\boldsymbol{F}_2'(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_2(t)\boldsymbol{P}_2(t|t) \tag{73}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Sigma}^2{}_t}{dt}=[\boldsymbol{F}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_2(t)]\boldsymbol{\Sigma}^2{}_t+\boldsymbol{\Sigma}^2{}_t\boldsymbol{F}_1'(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_1(t)\boldsymbol{P}_1(t|t) \tag{74}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\Sigma}^3{}_t}{dt}=&[\boldsymbol{F}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_1(t)]\boldsymbol{\Sigma}^3{}_t+\boldsymbol{\Sigma}^3{}_t[\boldsymbol{F}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_2(t)]'\\&+\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)\boldsymbol{K}_2'(t)-\boldsymbol{P}_1(t|t)\boldsymbol{H}_1'(t)\boldsymbol{K}_2'(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_2(t)\boldsymbol{P}_2(t|t)\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\Sigma}^4{}_t}{dt}=&[\boldsymbol{F}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_2(t)]\boldsymbol{\Sigma}^4{}_t+\boldsymbol{\Sigma}^4{}_t[\boldsymbol{F}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_1(t)]'\\&+\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)-\boldsymbol{P}_2(t|t)\boldsymbol{H}_2'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_1(t)\boldsymbol{P}_1(t|t)\end{aligned} \tag{76}$$

ただし $\boldsymbol{F}_1(t)$，$\boldsymbol{F}_2(t)$，$\boldsymbol{H}_1(t)$，$\boldsymbol{H}_2(t)$，$\boldsymbol{\Gamma}(t)$ はそれぞれ $n_1\times n_1$，$n_2\times n_2$，$n_3\times n_1$，$n_3\times n_2$，$n_3\times d$ 行列であって，それ以外の関数記号については前述の記号そのままとし，それらと同じ性質も同時にもつものとする。また $\boldsymbol{A}(t,\ \tau)$，$\boldsymbol{B}(t,\ \tau)$ はそれぞれ $n_1\times n_3$，$n_2\times n_3$ 行列でインパルス応答関数を表わし。その要素は t，τ について連続微分可能とする。

さて，この結果を擬線形系 (42) (46) (55) に適用することにする。第2節で提起された問題において

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)=E\{\boldsymbol{x}(t)|Z_t\}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^x(t|t)-\boldsymbol{\rho}^x(t)$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)=E\{\boldsymbol{y}(t)|Z_t\}=\hat{\boldsymbol{\xi}}^y(t|t)-\boldsymbol{\rho}^y(t)$$

なる関係が成立することに注意をしよう。ここで線形推定

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}^x(t|t)=\int_{t_0}^t\boldsymbol{A}(t,\ \tau)\bar{\boldsymbol{\eta}}(\tau)d\tau \tag{77}$$

$$\hat{\xi}^y(t|t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{B}(t,\ (\tau)\bar{\boldsymbol{\eta}}(\tau)d\tau \tag{78}$$

を仮定する。(42) (46) (55) と (56) (57) (58) とを比較することによって関数の書きかえ

$\boldsymbol{x}(t)\to\xi^x(t)$　　$\boldsymbol{y}(t)\to\xi^y(t)$　　$\boldsymbol{F}_1(t)\to\boldsymbol{\Theta}_1(t)$

$\boldsymbol{F}_2(t)\to\boldsymbol{\Theta}_2(t)$　　$\boldsymbol{H}_1(t)\to\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)$　　$\boldsymbol{H}_2(t)\to\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)$

$\boldsymbol{\Gamma}(t)\to\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)$　　$\boldsymbol{Z}(t)\to\bar{\boldsymbol{\eta}}(t)$

$\boldsymbol{G}_1(t),\ \boldsymbol{G}_2(t),\ \boldsymbol{Q}(t),\ \boldsymbol{R}(t),\ \boldsymbol{S}(t)$　はそのまま

を行って，その結果に (41) (44) をふたたび適用することにより次の結果をうる。

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)}{dt}=\boldsymbol{\theta}_1(t)+\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{V}(t)=\hat{\boldsymbol{F}}_1[t,\ \boldsymbol{x}(t)]+\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{V}(t) \tag{79}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)}{dt}=\boldsymbol{\theta}_2(t)+\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{V}(t)=\hat{\boldsymbol{F}}_2[t,\ \boldsymbol{y}(t)]+\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{V}(t) \tag{80}$$

ただし

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_1(t)=&\boldsymbol{P}_1(t|t)\boldsymbol{\Theta}'_{3x}(t)[\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}'(t)]^{-1}\\&+\boldsymbol{\Sigma}^1{}_t\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)[\boldsymbol{\Theta}_{3v}'(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}'(t)]^{-1}\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_2(t)=&\boldsymbol{P}_2(t|t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}'(t)[\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}'(t)]^{-1}\\&+\boldsymbol{\Sigma}^2{}_t\boldsymbol{\Theta}'_{3x}(t)[\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Theta}'_{3v}(t)]^{-1}\end{aligned} \tag{82}$$

$$\boldsymbol{P}_1(t|t)=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t),\ \boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)] \tag{83}$$

$$\boldsymbol{P}_2(t|t)=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t),\ \boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)] \tag{84}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^1{}_t=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t),\ \boldsymbol{y}(t)] \tag{85}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^2{}_t=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t),\ \boldsymbol{x}(t)] \tag{86}$$

また

$$\boldsymbol{\Sigma}^3{}_t=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t),\ \boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)] \tag{87}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^4{}_t=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t),\ \boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)] \tag{88}$$

(83)～(88) は次の連立微分方程式の解としてえられる。

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{P}_1(t|t)}{dt}=&[\boldsymbol{\Theta}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)]\boldsymbol{P}_1(t|t)+\boldsymbol{P}_1(t|t)[\boldsymbol{\Theta}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)]'\\&+\boldsymbol{G}_1(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{G}_1'(t)+\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Theta}'_{3v}(t)\boldsymbol{K}'_1(t)\\&-\boldsymbol{K}_1'(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{\Sigma}^4{}_t-\boldsymbol{\Sigma}^3{}_t\boldsymbol{\Theta}_{3y}'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)\end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{P}_2(t|t)}{dt}=&[\boldsymbol{\Theta}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)]\boldsymbol{P}_2(t|t)+\boldsymbol{P}_2(t|t)[\boldsymbol{\Theta}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)]'\\&+\boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{G}_2'(t)+\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}'(t)\boldsymbol{K}'_2(t)\\&-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{\Sigma}^3{}_t-\boldsymbol{\Sigma}^4{}_t\boldsymbol{\Theta}_{3x}'(t)\boldsymbol{K}_2'(t)\end{aligned} \tag{90}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Sigma}^1{}_t}{dt}=[\boldsymbol{\Theta}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)]\boldsymbol{\Sigma}^1{}_t+\boldsymbol{\Sigma}^1{}_t\boldsymbol{\Theta}_2'(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)P_2(t|t) \tag{91}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Sigma}^2{}_t}{dt}=[\boldsymbol{\Theta}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)]\boldsymbol{\Sigma}^2{}_t+\boldsymbol{\Sigma}^2{}_t\boldsymbol{\Theta}_1'(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{P}_1(t|t) \tag{92}$$

$$\frac{d\Sigma^3{}_t}{dt}=[\Theta_1(t)-K_1(t)\Theta_{3x}(t)]\Sigma^3{}_t+\Sigma^3{}_t[\Theta_2(t)-K_2(t)\Theta_{3y}(t)]'$$
$$+K_1(t)\Theta_{3v}(t)S(t)\Theta_{3v}'(t)K_2'(t)-P_1(t|t)\Theta_{3x}'(t)K_2'(t)$$
$$-K_1(t)\Theta_{3y}(t)P_2(t|t) \tag{93}$$

$$\frac{d\Sigma^4{}_t}{dt}=[\Theta_2(t)-K_2(t)\Theta_{3y}(t)]\Sigma^4{}_t+\Sigma^4{}_t[\Theta_1(t)-K_1(t)\Theta_{3x}(t)]'$$
$$+K_2(t)\Theta_{3v}(t)S(t)\Theta'_{3v}(t)K_1'(t)-P_2(t|t)\Theta_{3y}'(t)K_1'(t)$$
$$-K_2(t)\Theta_{3x}(t)P(t|t) \tag{94}$$

5. むすび

以上のことがらを要約すると次のようにいえる。(1) (2) あるいは (1)′ (2)′ で表わされる力学形で支配される状態ベクトル $x(t)$, $y(t)$ と観測雑音 $V(t)$ との非線形結合観測信号 (8) あるいは (9) があたえられているとき，$x(t)$ のすべての共状態ベクトル x^* に関して $E[x^*, x(t)-\hat{x}(t|t)]^2$ を最小にする線形推定 $\hat{x}(t|t)$ は (41) と共に (77) で表わされるとすると，その擬線形推定過程は (79) (80) で示される連立微分方程式で表わされる。$y(t)$ についても同様に，そのすべての共状態ベクトル y^* に関して，$E[y^*, y(t)-\hat{y}(t|t)]^2$ を最小にするような線形推定 $\hat{y}(t|t)$ を仮定している。これら連立微分方程式に含まれる未知の関数 $K_1(t)$, $K_2(t)$ はそれぞれ (81) (82) で求められるが，それらは結局 (89)～(94) で表わされる連立微分方程式の解を求めることによって計算することができる。このとき，推定誤差の評価は，誤差 $\tilde{x}(t|t)=x(t)-\hat{x}(t|t)$ の自己共散分行列 $P_1(t|t)$ を計算することによってえられる。いづれにしても，このようにしてえられた推定過程は擬線形推定過程であって，そのような取り扱いを採用した理由は最初に仮定した力学系，観測系は非線形であって，一般に無限次元のモーメントに関する情報を含んでいるから，物理的に実限不可能となるからであった。なお擬線形化プロセスにおいて，あたえられた各展開係数の計算においては，条件つき期待値を計算する必要がある。これらの具体的計算例については又別の機会に報告したい。

文　　献

1) N· Wiener: Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series; John-Wiley N. Y 1949.
2) R. E. Kalman & R. S. Bucy: New Results In Linear Filtering and Prediction Theory: ASME. J. Basic Eng., 83, 95–108 March, 1961.
3) たとえば D. L. Snyder: The State-variable Approach to continuous Estimation with Applications to Analog Communication Theory: Research Monograph No. 51 The M. I. T Press 1969. pp. 5–6.
4) 砂原善文：確率制御過程論：養賢堂，1971. pp. 157–180.
5) 天野正章：多入力信号に対する最適推定：明大工研報告　No. 29, 1974.