計量経済学の方法における 構造的問題

小　林　和　司

目　次

はじめに

本論の目的は，計量経済学の方法の中に存在する構造的問題を考察することにある。その構造的問題とは，次の一文に要約される。

誤差項の真の確率分布が未知であるときに，誤差項の確率分布に基づいて評価や判定を下すことは問題である。

論理的に考えて，誤差項の確率分布に基づいて評価や判定を下す場合には，その確率分布が真である必要がある。今，真の確率分布が未知であるならば，上記の評価や判定は信頼できないものとなろう。以下，第１節において，１つのモデルを提示して，誤差項の確率分布に基づく評価や判定が具体的に何を指しているかを例示する。第２節では，提示されたモデルにおける誤差項

の真の確率分布が未知であることを示し，第3節において，上記の問題を解決する道を探る。

第1節　確率分布に基づく評価と判定

ここでは伝統的な回帰分析に基づいて，消費関数のモデルを考えてみたい。わが国におけるt年目の消費水準C_tは，同年のわが国における所得水準Y_tの1次式として

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t \tag{1-1}$$

と表されるとしよう。ここで，αとβは未知の定数であり，u_tが誤差項である。「従来の経験や，経験によって支持されている手持ちの理論によって，すでに消費に影響することが知られている因子」[1]を系統的因子と呼ぶことにすれば[2]，所得が系統的因子ということになるが，さらに人口や物価指数といったその他の系統的因子は統御されており，定数項αの中に含まれていると解釈することも可能である[3]。

統御されているという表現に現れているように，ここでは消費水準のデータは母集団から得られた無作為標本であるとみなされており，無作為に標本を抽出するという実験を想定しているわけである。ここで消費水準の母集団は，実験を繰り返すことにより得られるデータの集合について，実験回数を無限大に近づけたときの極限における集合であると考えられている。この実験においては，系統的因子が一定に保たれる必要がある[4]。つまり，消費水準は確率変数であるが，所得水準（及びその他の系統的因子）は確率変数ではないと想定されているのである。

系統的因子を一定に保ちながら前述の実験を繰り返したとしても，得られる消費水準の値が同じになるとは考えにくい。それは，系統的因子以外にも消費に影響を与える因子が存在すると考えられるからであり，そうした因子

は非系統的因子と呼ばれている[5]。そして，こうした非系統的因子が消費に及ぼす効果を反映しているのが誤差項である。

この誤差項は確率変数であるとみなされており，その確率分布に関連して以下のように5つの仮定をおくのが一般的である。

仮定1：誤差項の期待値は t にかかわらず0である。

仮定2：誤差項の分散は t にかかわらず σ^2 である。

仮定3：誤差項同士は相関しない。

仮定4：誤差項はモデルの説明変数と相関しない[6]。

仮定5：誤差項は正規分布に従う。

さて，こうしたモデルに対して，今 C_t と Y_t の年次データが n 組得られているとしよう。このとき，誤差項の確率分布に基づいて下される評価や判定はさまざまなものが提案されてきているが，ここでは例として次のものを取り上げることにしよう。

まず，評価としては，β の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ が不偏性と一致性と有効性を満たすという評価を取り上げる。そして判定としては，$\hat{\beta}$ の有意性検定，すなわち「$\beta=0$」という仮説が棄却されるかどうかという判定を取り上げる。これらが誤差項の確率分布に基づくものであることをここで明らかにしておきたい。

最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ は誤差項 u_t と β を用いて

$$\hat{\beta} = \beta + \sum_{t=1}^{n} \omega_t u_t \tag{1-2}$$

と表現できる。ここで，ω_t は Y_t のデータから計算される統計量であり，

$$\omega_t = \frac{Y_t - \bar{Y}}{\sum_{t=1}^{n}\left\{(Y_t - \bar{Y})^2\right\}} \qquad \text{ただし，} \bar{Y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t}{n} \tag{1-3}$$

と定義される。β と ω_t は確率変数ではないので，$\hat{\beta}$ の確率分布は u_t の確率

分布に依存して決定されることがわかる。

$\hat{\beta}$ が不偏性を満たすかどうかは，(1-2)式により調べられる。(1-2)式の両辺の期待値をとると，

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \sum_{t=1}^{n} \omega_t E(u_t) \tag{1-4}$$

となるので，誤差項の期待値が0になるかどうかが問題となる。ところが，誤差項の期待値は確率密度関数 f を用いて

$$E(u_t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t f(u_t) du_t \tag{1-5}$$

と定義されていた。従って，$\hat{\beta}$ が不偏性を満たすかどうかという評価は，誤差項の確率密度関数ひいては誤差項の確率分布に基づくものであることがわかる。

$\hat{\beta}$ が有効性を満たすかどうか，すなわち $\hat{\beta}$ が不偏推定量であるときに，$\hat{\beta}$ の分散 $V(\hat{\beta})$ が β に関する任意の不偏推定量 $\hat{\beta}$ の分散の中で最小であるかどうかは，一般にクラメル＝ラオの不等式を用いて調べられる。今消費水準は確率変数であるので，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ の同時確率密度関数を考えると，この関数を3つのパラメータ α, β, σ^2 の関数とみなしたものが尤度関数である。この尤度関数の自然対数をとったものを L と書くとき，次の行列

$$\begin{bmatrix} -E\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}\right) & -E\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta}\right) & -E\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \sigma^2}\right) \\ -E\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \alpha}\right) & -E\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \beta^2}\right) & -E\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \sigma^2}\right) \\ -E\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \alpha}\right) & -E\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \beta}\right) & -E\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial (\sigma^2)^2}\right) \end{bmatrix} \tag{1-6}$$

の逆行列の第2対角要素を I^{22} とすれば，

$$V(\hat{\beta}) \geq I^{22} \tag{1-7}$$

が成立する。この不等式がクラメル＝ラオの不等式であり，$\hat{\beta}$ が有効性を満

たすかどうかは，$\hat{\beta}$ の分散 $V(\hat{\beta})$ が I^{22} に等しいかどうかという問題に帰着する。

I^{22} は，対数尤度関数 L ひいては消費水準の同時確率密度関数に依存して決定される。ところが，消費水準の確率分布ひいては同時確率分布はモデル(1-1)式からわかるように，誤差項の確率分布に依存している。従って，$\hat{\beta}$ が有効性を満たすかどうかという評価は，誤差項の確率分布に基づくものであることがわかる。

第三に $\hat{\beta}$ が一致性を満たすかどうかは，数学的には次の等式が成り立つかどうかということと同値である。

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\beta}_n-\beta| > \varepsilon) = 0 \tag{1-8}$$

ただし，P は確率関数，ε は任意の正の数であり，$\hat{\beta}_n$ は n 組のデータから定められた最小二乗推定量という意味である。

これを調べるには，チェビシェフ（Chebyshev）の不等式が用いられる。すなわち，この不等式によれば，任意の正の数 k に対して，

$$P\left\{|\hat{\beta}_n-E(\hat{\beta}_n)| \geq k\sqrt{V(\hat{\beta}_n)}\right\} \leq \frac{1}{k^2} \tag{1-9}$$

が成立する。

今，最小二乗推定量が不偏推定量であることを前提にすると，k^2 を $n\to\infty$ のときに無限大になるよう設定できるならば，さらに $k\sqrt{V(\hat{\beta}_n)}$ が $n\to\infty$ のときに正数に収束するならば，一致性が満たされることになる。ところで，$V(\hat{\beta})$ は $E\left[\{\hat{\beta}-E(\hat{\beta})\}^2\right]$ と定義されていることからわかるように，$\hat{\beta}$ の関数の期待値である。つまり，$\hat{\beta}$ の確率密度関数を g とすれば，

$$V(\hat{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty}\{\hat{\beta}-E(\hat{\beta})\}^2 g(\hat{\beta})d\hat{\beta} \tag{1-10}$$

として定義されることになる。ここで，(1-2)式からわかるように，$\hat{\beta}$ の確率密度関数，ひいては確率分布は誤差項の確率分布に依存しており，$\hat{\beta}$ の期

待値も誤差項の確率分布に依存していることはすでに見た。従って，$\hat{\beta}$ が一致性を満たすかどうかという評価は，誤差項の確率分布に基づくものであることがわかる。

次に，$\hat{\beta}$ の有意性検定が誤差項の確率分布に基づくものであることを明らかにしておきたい。「$\beta=0$」という仮説に対する検定統計量は，

$$\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{(n-2)\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\bar{Y})^2}}} \tag{1-11}$$

として与えられる。ここで，e_t は最小二乗推定量によって定められる残差であり，

$$\begin{aligned} e_t &= C_t-\hat{\alpha}-\hat{\beta}Y_t \\ &= (\alpha+\beta Y_t+u_t)-\hat{\alpha}-\hat{\beta}Y_t \\ &= u_t+(\alpha-\hat{\alpha})+(\beta-\hat{\beta})Y_t \\ &= u_t-\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\bar{Y}\omega_t\right)u_t-\sum_{t=1}^{n}\omega_t u_t \end{aligned} \tag{1-12}$$

と変形することができる。

この検定統計量(1-11)は，誤差項に対する前述の仮定５つが満たされているとき，自由度（$n-2$）の t 分布に従うことが証明されているけれども，(1-2)式と(1-12)式を検定統計量(1-11)に代入してみればわかるように，検定統計量(1-11)の確率分布は誤差項の確率分布に完全に依存している。

検定では，有意水準を適当に設定して棄却域を定めることになるが，この棄却域は検定統計量の確率分布に応じて決まるものである。そして，検定統計量の値が棄却域に属するかどうかは，棄却域がどのように定められているかに依存する。従って，「$\beta=0$」という仮説が棄却されるかどうかという判定は，誤差項の確率分布に基づくものであることがわかる。

第2節　誤差項の真の確率分布

では，誤差項の真の確率分布について考えよう。誤差項の確率分布を調べるには，母集団の定義を明らかにする必要があるだろう。

モデル(1-1)式における誤差項は，非系統的因子から成る。また，所得や消費のデータが観測誤差を含むと考えれば，(1-1)式の誤差項に観測誤差も含まれていると解釈することもできる。

今，系統的因子を一定にして消費水準を計測する実験を繰り返して行うとすると，すべての非系統的因子は総体としてさまざまな値をとると考えられる。この値の集合を，実験回数を無限大に近づけたときの極限において捉えたものが誤差項の母集団である。しかし，現実には非系統的因子が厳密に定義されていないことに加えて，非系統的因子が複数あるとすれば，その複数の因子が単純に合計されて誤差項を構成するのか，あるいは1次結合の形になるのか，あるいは2次以上の高次式の形になるのかが不明である。しかもこれに観測誤差も入り込んでくるとなると，実験結果から誤差項に相当するデータを直接入手することは困難であり，誤差項の母集団は，消費水準の母集団から導出されると考えざるを得ない。

消費水準のデータを入手する実験を無限に繰り返すことによって得られる消費水準のデータの集合が消費水準の母集団であり，現実に得られているデータはその母集団から無作為に抽出された標本である。今消費水準のデータは n 個得られており，それらは C_1, C_2, …, C_n と表されていた。これを代表して C_t と書いて，それに対応する誤差項を u_t と書いていた。

ここでは，より具体的に，しかし一般性を失うことなく，3年目の消費水準 C_3 を例にとって議論を続けよう。C_3 の母集団は，所得水準を Y_3 で固定し，その他の系統的因子も一定にした上で消費水準を計測する実験を無限に

繰り返すことによって得られるデータから成る。この母集団は，C_4 の母集団と同一である保証は全くない。なぜなら，これら2つの母集団において，系統的因子の1つである所得水準が異なっているからである[7]。

さて，u_3 の母集団は，C_3 の母集団から無作為に抽出された標本（データ）をもとにして，

$$u_3 = C_3 - (\alpha + \beta Y_3) \tag{2-1}$$

という式から計算される数値（データ）から成ると考えられる。C_3 の母集団は無限個のデータを含むので，それに対応して u_3 の母集団も無限個のデータを含むことになる。それらのデータの中には同一のものもあるわけで，各データの個数に関する相対頻度を調べ上げることができるならば，これがまさに u_3 の母集団における真の確率分布になる。

しかしながら，この方法によって真の確率分布を導出することにはいくつか問題がある。まず(2-1)式は，C_3 が Y_3 の1次式 $(\alpha + \beta Y_3)$ で表されるという想定に基づいているが，この1次式が真であるとは限らない。また，仮に Y_3 の1次式が真であるとしても，(2-1)式から導出される u_3 の値は未知数 α, β を含んでおり，我々は推定値 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ を代入することによって得られる残差

$$\tilde{e}_3 = C_3 - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} Y_3 \tag{2-2}$$

を u_3 の推定値として入手できるに過ぎない。

しかもこのとき，推定方法の選択という分析者の主観に基づく行為が $\tilde{e}_3$ の値に影響を及ぼすという構造になっているのである。例えば，推定方法として最小二乗法を採用するならば，それによって定められる残差

$$e_t = C_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Y_t \tag{2-3}$$

の平均値

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t}{n} \tag{2-4}$$

は必ず0になる。

このように，u_3 に関して我々が現実に入手できる標本は，u_3 の母集団の一部である保証がないばかりか，分析者の主観を反映したものとなっている。さらに，この情報をもとにして母集団における確率分布を導出しようとするためには C_3 の母集団が与えられている必要があるが，後で見るように C_3 の母集団を明らかにすることはきわめて困難である。以上のことから，u_3 の真の確率分布は未知であると捉えるべきであると我々は考える。

他方，計量経済学の方法においては，u_3 の母集団における確率分布に基づいて評価や判定を下す以上，その確率分布が真であることを保証しておくことは論理的に必要であるとの観点から，真の確率分布を推測しようとする試みがいくつか存在する。

母集団における u_3 の確率分布を推測する方法には，3通りあるように思われる。1つは，u_3 の母集団からいくつか標本を抽出して標本分布を作成し，そこから母集団の確率分布を推定する方法である。第二は，u_3 の母集団における確率分布に関する仮説を設定し，u_3 の母集団から抽出された標本をもとにその仮説を検定する方法である。第3は，中心極限定理を用いて u_3 の母集団における確率分布が正規分布で近似できることを示す方法である。

まず，第一の方法から考えてみたい。確率分布を推定する場合には，標本分布の特性値を求め，これを手がかりにして母集団における確率分布の特性値を推定することになる[(8)]。

特性値として k 次の積率を考えると，u_3 の母集団における k 次の積率 μ_k は

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} u_3^k f(u_3) du_3 \tag{2-5}$$

と定義される。ただし，f は u_3 の確率密度関数である。

一方，抽出された標本における k 次の積率 M_k は，

$$M_k = \sum_{i=1}^{m} X_i^k F_i \tag{2-6}$$

と与えられる。ここで，X_i は標本分布（標本における u_3 の確率分布）の第 i 階層の中央値であり，F_i はその階層に含まれる u_3 のデータの個数の相対頻度である。つまり，標本分布を作成するには，C_3 の母集団から無作為に標本を抽出するという実験を N 回繰り返すことによって C_3 のデータを N 個得る。そしてその N 個のデータから(2-1)式により N 個の u_3 のデータを得る。この N 個の u_3 のデータを m 個の階層に振り分けると，第1階層には n_1 個のデータが属し，第2階層には n_2 個のデータが属するといった具合に，u_3 のデータが分布する。そこで，

$$F_i = \frac{n_i}{N} \qquad ただし，N = \sum_{i=1}^{m} n_i \tag{2-7}$$

と定義すれば，F_i は第 i 階層に属するデータの個数の相対頻度になる。

得られているデータの個数 N が小さい場合には，それらのデータがちょうど中央値となるように m 個の階層に分ければよい。例えば $N = 5$ のとき，m 個の階層のうち5つの階層にデータが1つずつ属しており，その他の階層にはデータが属していないとすれば，

$$F_i = \frac{n_i}{5} \qquad ただし，n_i = 1 \text{ または } 0 \tag{2-8}$$

となるので，

$$M_k = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} X_j^k \qquad ただし，n_j = 1(j = 1, 2, \cdots, 5)$$
$$= 0(j > 5) \tag{2-9}$$

と計算できることになる。

さて，M_k を用いて μ_k を推定するにあたっては，いくつかの困難に出くわすことになる。まず第一に，C_3 の母集団から無作為に抽出された標本（データ）をもとにして u_3 の母集団から抽出された標本を明らかにしようにも，正確なデータを得ることが困難である。これは，前述のように，(2-1)式に

おいてαとβが未知数であることに加えて，Y_3の1次式が真である保証がないことによる。

第二の困難は，少なくとも現時点において，u_3の母集団から抽出された標本の大きさは1で，標本数も1であるということである。これは，C_3の母集団から無作為に抽出された標本（データ）の大きさが1で，標本数も1であることによる。つまり，3年目の消費水準のデータは1つしか得られていないのである。u_3の母集団から抽出された標本の大きさが1で，標本数も1であるということは，標本における確率分布を作成することが困難であることを意味する。

この困難に対しては，$u_t(t=1, 2, \cdots, n)$の母集団から無作為に抽出された標本を大きさnの標本とみなすことがある。しかしながら，このことは，$u_1, u_2, \cdots, u_n$が「u_tの母集団」という単一の母集団から成るn次元確率変数であることを意味するに過ぎず，あくまで標本数は1のままであるので，$N=1$である。Nとnを同一視して(2-9)式を

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t^k \qquad (2\text{-}10)$$

と表現することができるためには，$u_1, u_2, \cdots, u_n$の母集団における周辺確率分布関数が同一であるだけでなく，$u_1, u_2, \cdots, u_n$が互いに独立でなければならない(9)。母集団が未知であるから推定しようとしているわけであるのに，その母集団における確率分布に対して，周辺確率分布関数が同一で，しかも独立であることを前提することは無理があろう。

第三の困難は，標本数を増やすべく，実験を繰り返そうとするときに生じる。u_3の母集団から抽出される標本の数を増やすには，C_3の母集団から無作為に抽出される標本の数を増やさねばならない。ところで，この標本を抽出するという実験は，3年目のわが国の消費活動を再び実行してみることに対応するかもしれない。しかし，過去の消費活動を再び実行するということ

は生身の人間には不可能である。仮にコンピュータを用いてそうした実験を行うとしても，そこには何らかの仮定が置かれているはずで，その仮定が現実に満たされるかどうかを検討することは，さらなる困難をもたらすことになろう。

他方，この標本を抽出するという実験は，3年目のわが国の消費水準を集計する際に用いられた標本とは別の標本に基づいて消費水準を推計してみることに対応するかもしれない。その場合，標本数を増やすことができるならば，それに基づいてu_3の母集団から抽出されたとみなされる標本の数も増えることになる。すると，この複数の標本を元にして標本分布を作成することも可能になるように見える。しかし，消費水準を推計するための標本調査は全数調査を行ったうえでその中から一部を抽出するというわけではなく，標本を1組抽出して推計作業を終了している。したがって，別の標本を得るという作業は，過去の事でもあり，困難を極めることになるだろう。

さらには，この標本を抽出するという実験は，所得水準がY_3であり，かつ他の系統的要因も3年目のわが国の状況と等しいときにおける消費水準を調査することに対応するかもしれない(10)。しかし，こうした条件を満たす時代や国は少数であろう。仮にこうした解釈に基づく実験によって複数の標本を得たとしても，前述の通りそれらが本当にu_3の母集団から抽出されたという保証はないのである。

このように，実験の内容をさまざまに解釈することができるのは，母集団の「生い立ち」によるものである。u_3の母集団は，C_3の母集団から無作為に抽出されたデータをもとにして，(2-1)式から計算される数値の集合であるとみなされていた。そしてC_3の母集団は，所得水準をY_3で固定し，その他の系統的因子も一定にした上で消費水準を計測する実験を無限に繰り返すことによって得られるデータの集合であるとみなされていた。

ところが，現実に存在するのは，C_3に対するたった1つのデータである。

この C_3 を確率変数とみなして母集団を想定するというのは，いわば計量経済学の公理であり，母集団が現実に存在していたわけではない。それゆえ C_3 の母集団から無作為に標本を抽出するという行為は，母集団を想定したときにすでに併せて想定されていたことであり，現実に母集団から抽出することによって C_3 のデータを入手したわけではないのである。

母集団から無作為に標本を抽出するという行為に現実的な解釈を与えるのが実験の内容である。ゆえに，実験の内容はいろいろな代替案を持つけれども，今見たようにいずれにせよこうした実験は困難を伴う。

実験を繰り返すことが困難であると言うことは，現実に母集団を構成することが困難となり，そもそも母集団概念を想定すること自体に無理があるということになる[11]。こうした状況下において，いわば強引になされる推定結果に信頼を置くことができるであろうか。

次に，第2の方法，すなわち u_3 の母集団における確率分布に関する仮説を設定し，u_3 の母集団から抽出された標本をもとにその仮説を検定するという方法を考えてみたい。

第1節において誤差項に対する仮定として紹介したように，u_3 は正規分布に従うと仮定されることが多く，それに関する検定はいくつか提案されている。しかしながら，推定が困難な状況では，検定も困難であると言わねばならない。推定と検定はアプローチの仕方が異なるものの，誤差項が確率変数であることを利用して，確率分布に関する情報を探るという目的は共通しているからである。

ここでは2つの検定を取り上げて，第1節で設定されたモデルとデータに対しては，誤差項の確率分布について何らかの推測をしようとすることに無理があることを示したい。

第1の検定は，積率を利用したものである。一般に確率変数 X の期待値を μ で表し，平均のまわりの k 次の積率 $E[(X-\mu)^k]$ を α^k で表すことにすると，

X が正規分布に従うならば，歪度 $\left(\alpha_3/\sqrt{\alpha_2^3}\right)$ および尖度 $\{(\alpha_4/\alpha_2^2)-3\}$ は0になる。このことを利用すると，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が互いに独立に期待値0，分散 σ^2 の正規分布に従うという仮説のもとでは，標本歪度

$$b_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i^3}{s^3} \qquad ただし，s^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}e_i^2 \tag{2-11}$$

および標本尖度

$$b_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i^4}{s^4}-3 \tag{2-12}$$

が漸近的に期待値0の正規分布に従うので，b_1, b_2 を検定統計量として，上記の仮説が棄却されるかどうかを判定するという検定が考えられる(12)。

この検定では，検定統計量の値が0に近いということが，必要条件であって十分条件ではないことに注意する必要がある。つまり，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が互いに独立に期待値0，分散 σ^2 の正規分布に従うならば，b_1, b_2 は0に近い値をとるはずであるが，逆に b_1, b_2 の値が0に近いからといって $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が互いに独立に期待値0，分散 σ^2 の正規分布に従うという保証はない。

第2の検定は，ランキット（rankit）を用いた検定である(13)。$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が互いに独立に期待値0，分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数であれば，

$$\nu_t=\frac{u_t}{\sigma} \tag{2-13}$$

は標準正規分布に従う確率変数である。

順序づけられた ν_t を

$$\nu_{(1)} \leq \nu_{(2)} \leq \cdots \leq \nu_{(n)} \tag{2-14}$$

とすると，ランキット $\mu_{(t)}$ は，$\nu_{(t)}$ の期待値として定義される。すなわち，

$$E[\nu_{(t)}]=\mu_{(t)} \tag{2-15}$$

が成立する。したがって，$\nu_{(t)}$ の $\mu_{(t)}$ への回帰は切片0，傾き1の直線とな

らなければならない。

$\mu_{(t)}$ は，標準正規分布の分布関数 Φ を用いて

$$\mu_{(t)} = \Phi^{-1}(a_t) \tag{2-16}$$

という近似式により求められる。ただし，a_t は t の関数であり，何通りかの候補が提案されている[14]。

一方，$\nu_{(t)}$ はスチューデント化残差

$$r_t = \frac{e_t}{s(1-h_{tt})^{1/2}} \tag{2-17}$$

を順序化した $r_{(t)}$ により求められる。ただし，e_t は最小二乗法により定められる残差であり，s^2 は誤差分散の不偏推定量であり，h_{tt} はハット行列[15] の t 番目の対角要素である。

こうして求められる $(\nu_{(t)}, \mu_{(t)})$ をプロットして，このプロットが原点を通る 45° 線に近いかどうかによって u_t の正規性を検定することができるという。

しかし，この検定においても，$(\nu_{(t)}, \mu_{(t)})$ のプロットが原点を通る 45° 線に近くなることは，u_t が正規分布に従うための必要条件でしかないことに注意する必要がある。

確かに，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が互いに独立に期待値 0，分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数であれば，各々の確率変数の実現値に基づいて計算される $(\nu_{(t)}, \mu_{(t)})$ のプロットは原点を通る 45° 線に近くなるけれども，例えば $u_1, u_2, \cdots, u_n$ が一様分布に従う確率変数であるとしても同一の実現値が得られる可能性がある。

しかしながら，こうした十分性についての論理的な問題以上に，検定の前提には母集団概念が想定されていることを重視すべきであろう。母集団があって初めて検定の対象が存在することになるからである。

ところで，「観測値の背後に母集団概念を想定するには，もし実際にわれ

われがやろうと思えば観測値を多数集めることができる，ということが必要である。」[16] ところが先に見たように，前節で提示されたモデルとデータに対しては，新たな観測値を得るための実験を繰り返すことが困難な状況にあるのである。このことは，検定を実行するにあたっての前提が十分に成立していないことを意味しないだろうか。

最後に第3の方法，すなわち中心極限定理を用いて u_3 の母集団における確率分布が正規分布で近似できることを示す方法について考えてみたい。

そもそも「中心極限定理とは,「確率変数列の和の分布が“適当な条件のもとで”正規分布に収束する」という形の定理の総称である。」[17]

今，u_3 は非系統的因子から成るのであった。そこで，この中心極限定理を利用して，各非系統的因子が確率変数であり，その和が u_3 であるとみなすならば，“適当な条件”のもとで u_3 の確率分布は正規分布で近似できると主張できることになる。

しかしながら，非系統的因子はモデル(1-1)式において具体的かつ厳密に定義されているわけではない。そこで“適当な条件”が満たされているかどうかを判断することができない。したがって，中心極限定理を u_3 の確率分布に関する議論に適用することは困難であり，依然として u_3 の真の確率分布は未知であると考えざるを得ない。

第3節　構造的問題への対処

第2節においては，第1節で提示されたモデルとデータに対して，誤差項の真の確率分布が未知であると考えられる根拠を示した。もちろん，このことは，すべてのモデル，すべてのデータに対してあてはまると考えてはならない。現に，第1節で提示されたモデルであっても，データが横断面データである場合については，誤差項の母集団について詳細な研究がなされてい

る[18]。ここでの議論は，あくまで誤差項の真の確率分布が未知であると考えざるを得ない事例が存在するということであり，そうした事例においても計量経済学の方法によれば，誤差項の確率分布に基づいて評価や判定を下してしまうということが問題であると述べているわけである。

本節では，この問題に対処するために，誤差項の真の確率分布が未知であるときに，誤差項の確率分布に基づくことなく，同様の評価や判定を下すことができるかどうかを考えてみたい。

まず，第1節で示した有意性検定について考える。(1-11)で示される検定統計量は，最小二乗推定値$\hat{\beta}$と0との差が統計的に十分大きいかどうかを測る尺度であり，大きいかどうかを判定する基準として有意水準に基づく判定点を用いていた。

ところで，誤差項の確率分布が未知であっても，最小二乗推定値は求められる。つまり，最小二乗法の定義に従って，残差

$$\tilde{e}_t = C_t - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} Y_t$$

の2乗をtについて合計したものが最小となるように$\tilde{\alpha}$と$\tilde{\beta}$の値を定めることは，具体的にC_tとY_tのデータが得られておりさえすれば可能である。したがって，検定統計量(1-11)の値もC_tとY_tのデータから一意に求められることになる。

この検定統計量の値が0から大きく離れているかどうかは，その値そのものから直接に判定することが可能である。たとえば，その値が135.07であれば，$\hat{\beta}$と0との差は十分大きいと判定することに論理的矛盾はないであろう。

もちろん，この検定統計量の値が1.93のように微妙な値であれば，大きいと判定できるかどうか難しいところであるが，決定係数のように1つの尺度として推定結果に検定統計量の値自体を添えておき，分析結果を見る者に1つの情報を提供するということだけでも，分析上は意味があることであろう。

次に，第1節で例示した推定方法の評価について考える。誤差項の真の確

率分布が未知であるとき，第1節で示した不偏性や一致性や有効性は，評価基準として意味を持たなくなる。

不偏性について言えば，(1-4)式において右辺第2項が0となるかどうかを問題にしていたわけであるが，$E(u_t)$の真の値が不明であり，推定も困難であるということになれば，$\hat{\beta}$が不偏性を満たすかどうか不明である。

一致性について言えば，$\hat{\beta}$の期待値や分散に基づいて，満たされるかどうかを議論したわけであるが，誤差項の真の確率分布が未知であるときその期待値や分散の真の値は不明であり，推定も困難である。

有効性について言えば，C_1, C_2, …, C_nの同時確率密度関数から作られる尤度関数に基づいて満たされるかどうかを議論していたわけであり，誤差項の真の確率分布が未知であるならば，C_1, C_2, …, C_nの同時確率密度関数自体を定めることが困難である。

こうした困難にもかかわらず，我々は推定方法の評価は可能であると考えている。というのは，計量経済学においてモデルを作成する目的は，経済変数間の真の関係を探り，予測を行うことにあると考えるからである。

つまり，何らかの推定方法によって，$\alpha=\tilde{\alpha}$, $\beta=\tilde{\beta}$と推定したとき，方程式

$$C_t=\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}Y_t$$

が将来においても精確に消費と所得の関係を示すものであるならば，その推定方法は望ましいものであったと言うことができよう。

歴史的に見ると，誤差を確率変数とみなした上で最小二乗法を用いて処理するという枠組みは，1809年ガウスによって公表された(19)。このときガウスは，誤差の確率分布として期待値が0の正規分布を用いて，惑星の軌道を決定する問題に取り組んだのである(20)。その後，ガウスが用いた確率分布は，ガウスの法則とも呼ばれるようになり(21)，誤差を扱うさまざまな分野に応用されてきている。計量経済学において誤差項に対して正規性の仮定が置かれ

るのも，このガウスの影響が大きいと考えられる。

このようにガウスの誤差法則が重視されている背景には，ガウス本人の多大な業績もさることながら，天文学における予測の精確さがあげられよう。

天文学においては，1609年と1619年にケプラー（Johannes Kepler）が，今日ではケプラーの法則として知られているところの，惑星の運動に関する3つの法則を発表し，17世紀末には，ニュートン（Isaac Newton）が，万有引力の法則と彼が見い出した力学（今日ではニュートン力学と呼ばれる）によって，その3つの法則を裏付けたのである[22]。ここにおいて天文学は，惑星の運動についての真の関数を得たことになる。

さらに，多くの研究者の努力により，観測データから観測者自身の運動の影響や観測者の位置による影響など考え得る限りの誤差を取り除くことに成功した[23]。

従って，ガウスが天文学においてとり扱った誤差は，まさしく中心極限定理の「適当な条件」を満たし，現実に期待値が0の正規分布で近似することが可能な確率変数であったと考えられる。

計量経済学は，1930年米国はオハイオ州クリーブランドにおいて計量経済学会（the Econometric Society）が設立されたときをもって誕生したと言われている。この学会誌『エコノメトリカ』(Econometrica) の創刊号において創設メンバーの一人であるフリッシュ（Ragnar Frisch）は，学会会則第1条を引用して計量経済学を，数学と統計学に関連づけて経済理論を発展させるためのものであると述べている[24]。

予測や誤差の処理に関して大先輩にあたる天文学と比較するとき，計量経済学の発展には，観測誤差をできる限り取り除く努力と，経済学における理論的枠組みの一層の整備が求められると言えよう。

《注》

（1）　小尾恵一郎など『統計学』NTT 出版，2000年，43ページ。

（2）　同上，43, 44ページ。

（3）　同上，137ページ。

（4）　同上，19ページ。

（5）　同上，44ページ。

（6）　今，所得水準が説明変数であるので，所得水準が確率変数ではないと想定されている場合には，誤差項と説明変数との共分散は0になる。つまり，仮定4は必ず成り立つことになる。

（7）　前掲『統計学』56ページ。

（8）　同上，66ページ。

（9）　北川敏男『統計学の認識』白揚社，1948年，320ページ。

（10）　前掲『統計学』50-52ページ。

（11）　同上，20ページ。

（12）　竹内啓代表編集『統計学辞典』東洋経済新報社，1992年，105ページ，および竹内啓「正規性の検定について」『経済学論集』39巻4号，1974年，24ページ。

（13）　蓑谷千凰彦「回帰モデルの誤差項の正規性検定 (1)」『三田学会雑誌』83巻2号，1990年7月，169-174ページから要約した。

（14）　同上，170, 171ページには，次の3つが示されている。

$$a_t = \frac{t-\alpha}{n-2\alpha+1}$$

ただし，$\alpha = 0.327511+0.058212\log_{10} n - 0.007909(\log_{10} n)^2$

$$a_t = \left(t-\frac{3}{8}\right)\Big/\left(n+\frac{1}{4}\right)$$

$$a_t = \left(t-\frac{1}{2}\right)\Big/n$$

（15）　モデル(1-1)式は，行列を用いて $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{u}$ と書ける。ただし，

$$\boldsymbol{C} = [C_1 C_2 \cdots C_n]'$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \end{bmatrix}'$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\alpha \quad \beta]'$$

$$\boldsymbol{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]'$$

である。このときハット行列は $X(X'X)^{-1}X'$ と表される。なお，行列の右肩に付けられているダッシュ記号は転置を意味する。

(16) 前掲『統計学』20 ページ。

(17) 前掲『統計学辞典』22 ページ。

(18) 前掲『統計学』3〜6 章。

(19) 安藤洋美『最小二乗法の歴史』現代数学社，1995 年，5・7 章。

(20) カール・F・ガウス（飛田武幸他訳）『誤差論』紀伊国屋書店，1981 年，92-113 ページ。

(21) 一瀬正巳『誤差論』培風館，1989 年，16 ページ。

(22) 物理学辞典編集委員会編『物理学辞典』改訂版，培風館，1992 年，1683 ページ。

(23) 長谷川一郎『天文計算入門』新装改訂版，恒星社，1997 年，6・7 章。

(24) Frisch, R., "Editorial," in *Econometrica*, vol. 1, 1933, p. 1.