



Title	行列 $[1/(x_i - y_j)]$ のLU分解
Author(s)	金子, 幸臣
Citation	明治大学科学技術研究所紀要, 27: 1-4
URL	http://hdl.handle.net/10291/13041
Rights	
Issue Date	1988-09-25
Text version	publisher
Type	Departmental Bulletin Paper
DOI	

<https://m-repo.lib.meiji.ac.jp/>

行列 $[1/(x_i - y_j)]$ の LU 分解

金子 幸 臣

LU Decomposition of the Matrix $[1/(x_i - y_j)]$

Satiomi KANEKO

*School of Engineering, Meiji University,
Tama-ku, Kawasaki, Kanagawa 214*

Received April 30, 1988; Accepted May 18, 1988

Synopsis Let $H=LU$ be the LU decomposition of the general Hilbert matrix H of order n with the entries $h_{ij}=1/(x_i - y_j)$, where $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ are distinct numbers, L is a lower triangular matrix with entries l_{ij} such that $l_{ij}=0$ for $i > j$, $l_{ii}=1$ for uniqueness' sake, and U is an upper triangular matrix with u_{ij} , such that $u_{ij}=0$ for $i > j$. And let $M=L^{-1}$, and $V=U^{-1}$.

Simple and n -independent expressions for the entries l_{ij} , m_{ij} , u_{ij} and v_{ij} are obtained in the following way.

The relation $U=L^{-1}H=MH$ can be considered as a decomposition of a rational function $u_k(y)=u_{kj}$ into partial fractions $m_{k1}/(x_1 - y) + m_{k2}/(x_2 - y) + \dots + m_{kk}/(x_k - y)$, thus $u_k(y)$ having zeros at y_1, y_2, \dots, y_{k-1} (for $u_k(y_1)=u_{k1}=0, \dots, u_k(y_{k-1})=u_{k, k-1}=0$) and simple poles at x_1, x_2, \dots, x_k which determine $u_k(y)$ except a constant factor, $m_{kj}=\lim_{y \rightarrow x_k} (y - x_k)(x_j - y)u_k(y)$ the coefficients of $1/(x_j - y)$ in the partial fraction decomposition of $u_k(y)$, and the constant factor is determined by the condition $m_{kk}=1$.

Similarly, l_{ik} and v_{ik} are obtained from the relation $L=HV$.

〔はじめに〕

ここに言う“一般ヒルベルト行列”の LU 分解も、必要な時に、文献などに見出しにくいので¹⁾、便利のため求めておいた。

〔定 義〕

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ を相異なる数の列とする。 n 次の行列 H の ij 成分 h_{ij} が

$$h_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j}$$

と表わされるとき、 H を一般ヒルベルト行列という。 H は逆行列をもつ。 L を左下三角行列、 U を右上三角行列として、 H をそれらの積の形 $H=LU$ に表わすことを、 LU 分解という。

さらに、 $M=L^{-1}$ 、 $V=U^{-1}$ とする。すなわち、成分について表わせば、

$$l_{ij}=0, \quad m_{ij}=0 \quad (i < j)$$

$$u_{ij}=0, \quad v_{ij}=0 \quad (i > j)$$

$$\sum_{k=1}^{\min(i, j)} l_{ik} u_{kj} = h_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j}$$

ここで、 L について条件

$$(A) \quad l_{ij}=1, \quad (i=j)$$

を採用すると、逆行列 $L^{-1}=M$ の成分についても $m_{ii}=1$ となり、 LU 分解は一意的となること
が、容易に示される²⁾。

多項式 $X_k(t)$ 、 $Y_k(t)$ 、 $k=1, 2, \dots$ を、

$$X_k(t) = (t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_k),$$

$$Y_k(t) = (t-y_1)(t-y_2)\cdots(t-y_k)$$

とする。

〔結 果〕

$$c_k = \frac{-X_{k-1}(x_k)}{Y_{k-1}(x_k)}$$

とおくと、0でない成分は

$$l_{ij} = \frac{y_k - x_k}{c_k} \frac{X_{k-1}(x_i)}{Y_k(x_i)}, \quad u_{kj} = c_k \frac{Y_{k-1}(y_j)}{X_k(y_j)},$$

$$v_{ik} = \frac{y_k - x_k}{c_k} \frac{X_{k-1}(y_i)}{Y_k'(y_i)}, \quad m_{kj} = -c_k \frac{Y_{k-1}(x_j)}{X_k'(x_j)}$$

これらの右辺は、 H の次数にはよっていない。

〔証 明〕

$U=L^{-1}H=MH$ より

$$u_{kj} = \sum_{i=1}^k \frac{m_{ki}}{(x_i - y_j)} = u_k(y_j)$$

ここに $u_k(y) = \sum_{i=1}^k \frac{m_{ki}}{(x_i - y)} = \frac{R(y)}{(y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_k)} = \frac{R(y)}{X_k(y)}$ 、 $R(y)$ は $(k-1)$ 次の
多項式。

$y = y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ のとき $u_k(y_j) = u_{kj} = 0$ より

$$R(y) = c_k(y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_{k-1}) = c_k Y_{k-1}(y)$$

$R(y), Y_{k-1}(y)$ とともに $(k-1)$ 次であるから, c_k は定数である。よって

$$(1) \quad (u_k(y) =) \quad \sum_{i=1}^k \frac{m_{ki}}{(x_i - y)} = \frac{c_k Y_{k-1}(y)}{X_k(y)}$$

両辺に $(x_j - y)$ を掛けて約分し, $y = x_j$ とおくと,

$$\left(X_k'(x) \equiv \frac{d}{dx} X_k(x) \right)$$

$$\begin{aligned} m_{kj} &= -c_k \frac{Y_{k-1}(x_j)}{X_k'(x_j)} \\ &= -c_k \frac{(x_j - y_1)(x_j - y_2) \cdots (x_j - y_j) \cdots (x_j - y_{k-1})}{(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)} \end{aligned}$$

特に $j = k$ のとき $m_{kk} = 1$

$$1 = m_{kk} = -c_k \frac{Y_{k-1}(x_k)}{X_k'(x_k)} = -c_k \frac{Y_{k-1}(x_k)}{X_{k-1}(x_k)}$$

よって

$$c_k = -\frac{X_{k-1}(x_k)}{Y_{k-1}(x_k)}$$

一方 $L = HU^{-1} = HV$ から同様に

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^k \frac{v_{ik}}{(x_i - y_j)} = l_k(x_i)$$

ここに

$$(2) \quad l_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{v_{jk}}{(x - y_j)} = d_k \frac{X_{k-1}(x)}{Y_k(x)}$$

$$\begin{aligned} 1 = l_{kk} = l_k(x_k) &= d_k \frac{X_{k-1}(x_k)}{Y_k(x_k)} \\ &= \frac{d_k X_{k-1}(x_k)}{(x_k - y_k) Y_{k-1}(x_k)} = \frac{d_k c_k}{(y_k - x_k)} \end{aligned}$$

よって $d_k = \frac{y_k - x_k}{c_k}$

(2) に $(x - y_i)$ を掛けて約分し, $x = y_i$ とおくと

$$v_{ik} = d_k \frac{X_{k-1}(y_i)}{Y_k'(y_i)} = \frac{(y_k - x_k)}{c_k} \frac{X_{k-1}(y_i)}{Y_k'(y_i)}$$

〔おわりに〕

n 次の切片として H を考えたが, [結果] は n によっていない。すなわち H, L, M, U, V はすべて無限行列でよかった。

また, 条件 $l_{ii}=1$ をはずせば, c_k は 0 以外, 任意でよい。

$LU=H$ を成分で書くと

$$\sum_{k=1}^{i,j} \frac{X_{k-1}(x_i)}{Y_i(x_i)} (y_k - x_k) \frac{Y_{k-1}(y_j)}{X_k(y_j)} = \frac{1}{x_i - y_j}$$

同様に

$$LM=I \text{ は } \sum_{k=i}^j \frac{X_{k-1}(x_i)}{Y_k(x_i)} (x_k - y_k) \frac{Y_{k-1}(x_j)}{X'_k(x_j)} = \delta_{ij}$$

$$ML=I \text{ は } \sum_{k=i}^j \frac{X_{i-1}(x_k)}{Y_i(x_k)} \frac{Y_{j-1}(x_k)}{X_j(x_k)} (x_j - y_j) = \delta_{ij}$$

$$VM=H^{-1} \text{ は } \sum_{k=\max(i,j)}^n \frac{X_{k-1}(y_i)}{Y'_k(y_i)} (x_k - y_k) \frac{Y_{k-1}(x_j)}{X'_k(x_j)} = \frac{X_n(y_i)}{Y'_n(y_i)} \frac{1}{y_i - x_j} \frac{Y_n(x_j)}{X'_n(x_j)}$$

などが成立することを示している。

文 献

- 1) S. Hitotumatu, Cholesky decomposition of the Hilbert matrix, JJAM, 5 no. 1, p. 135—144
- 2) B. Wendroff Theoretical Numerical Analysis Academic Press, New York 1966 (邦訳 サイエンス社 サイエンスライブラリー 情報電算機 19・戸川隼人訳)